Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2024/2025
Prof. Dr. Sören Bartels, Tatjana Schreiber

Praktische Übungen zu Numerik I

Projekt 2 – 06.11.2024

Abgabe: über Ilias bis Mittwoch, den 20.11.2024, 14:00 Uhr.

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws24/num/index.html`

Projekt 1 (6 Punkte)**.** Schreiben Sie ein Programm mit Funktionen `solve_upper` und `solve_lower` zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit regulärer oberer beziehungsweise unterer Dreiecksmatrix. Die Lösungen sind mit rückwärts beziehungsweise vorwärts laufenden Schleifen gegeben durch

$$x_j = \left(b_j - \sum_{k=j+1}^{n} u_{jk} x_k \right) / u_{jj}, \qquad x_j = \left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk} x_k \right) / \ell_{jj},$$

wobei die leere Summe den Wert Null hat. Testen Sie die Routinen für die Gleichungssysteme $A_l x = b_l$ mit

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 24 \end{bmatrix}.$$

Projekt 2 (6 Punkte)**.** Schreiben Sie ein Programm, das für eine LU-zerlegbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ihre LU-Zerlegung bestimmt.
Verwenden Sie die LU-Zerlegung sowie Ihre Lösung aus Projekt 1, um $A_i x = b_i$ für

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

zu lösen.
Hierbei sei $A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b_2 \in \mathbb{R}^n$. Lösen Sie dabei $A_2 x = b_2$ für $n = 2, 4, 8, \dots$ und beobachten Sie die Laufzeit Ihres Programms.
Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe der MatLab-Befehle `[L,U] = lu(A)` und `x = A\b`.
In Python kann `scipy` sehr nützlich sein:

```
from scipy import linalg
_,L,U = linalg.lu(A)
x = linalg.solve(A,b)
```