Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2024/2025
Prof. Dr. Sören Bartels, Tatjana Schreiber

Praktische Übungen zu Numerik I

Projekt 4 – 04.12.2024

Abgabe: über Ilias bis Mittwoch, den 18.12.2024, 14:00 Uhr.

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws24/num/index.html`

Projekt 1 (4+2 Punkte)**.**

(i) Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung der QR-Zerlegung mittels Householder Transformationen einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$. Testen Sie Ihr Programm mit der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 3 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) Verwenden Sie Aufgabenteil (i) zur Lösung des Linearen Ausgleichproblems

$$\text{Minimiere } x \mapsto \|Ax - b\|_2^2$$

Wobei A wie in Aufgabenteil (i) definiert sei und $b = [1, 1, 1, 1]^\top$.

Projekt 2 (6 Punkte)**.** Im Folgenden wollen wir die Ausgleichsrechnung zur Glättung von Messwerten mit Hilfe von Polynomen verwenden.
Gegeben seien die Messpunkte (x_i, y_i) für $i = 1, \ldots, m$ und der gewünschte Polynomgrad n. Gesucht ist also ein Polynom f vom Grad n, welches den folgenden Term minimiert:

$$\sum_{i=1}^{m} \left(f(x_i) - y_i\right)^2 .$$

(i) Schreiben Sie ein Programm, das für gegebene Messpunkte (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, und Polynomgrad n die Systemmatrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und den Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ des Ausgleichproblems bestimmt.
Hinweis: Wenn $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x^1 + \ldots + \alpha_n \cdot x^n$, dann muss die Matrix A folgende Gleichung erfüllen

$$Ax = A \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{pmatrix}$$

(i) Geben seien folgende Messpunkte

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	2.0	2.5	2.5	3.4	3.7	6.6	3

Bestimmen Sie für $n = 0, \ldots, 6$ jeweils das approximierende Polynom und plotten Sie das Ergebnis. Verwenden Sie Ihre Lösung aus Aufgabe 1 zum Lösen des Ausgleichproblems (alternativ können Sie auch die Matlab-Funktion `lsqr` bzw. die Python-Funktion `numpy.linalg.lstsq` zum Lösen des Ausgleichsproblems verwenden).