Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2024/2025
Prof. Dr. Sören Bartels, Tatjana Schreiber

Praktische Übungen zu Numerik I

Projekt 5 – 18.12.2024

Abgabe: über Ilias bis Mittwoch, den 15.01.2025, 14:00 Uhr.

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws24/num/index.html`

Projekt 1 (6 Punkte)**.** Ein digitalisiertes Graustufenbild lässt sich mit einer $(m \times n)$-Matrix beschreiben, in der der Eintrag (i, j) den Grauwert des Pixels (i, j) kodiert.
Sei nun $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ein digitalisiertes Bild mit Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^\top$ und den Singulärwerten $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$, $r = \operatorname{rang}(A)$.
Die beste Rang-k-Approximation A_k an A ist dann gegeben durch

$$A_k = U \begin{pmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^\top \text{ mit } \Sigma_k = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in \mathbb{R}^{k\times k}, \quad 1 \leq k \leq r.$$

Wir fragen uns jetzt, ob A_k auch eine gute visuelle Approximation an das durch A gegebene Bild liefert. Man beachte, dass sich A_k alternativ auch als $A_k = U_k\Sigma_k V_k^\top$ schreiben lässt, wobei $U_k \in \mathbb{R}^{m\times k}$ die Matrix bezeichne, die entsteht, wenn man aus der Matrix U die Spalten $k+1$ bis m entfernt. Analog bezeichnet $V_k \in \mathbb{R}^{n\times k}$ die Matrix V bis auf die Spalten $k + 1$ bis n.
Erweitern Sie obige Idee auf ein RGB-Farbbild, also $A \in \mathbb{R}^{m\times n\times 3}$. Implementieren Sie diese Idee für verschiedene Werte von k und beurteilen Sie den Qualitätsverlust für verschiedene Werte von k, berechnen Sie hierfür den Fehler $\|A - A_k\|_{\mathcal{F}}$. Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.
Verwenden Sie zum Laden des Bildes `weihnachtsbaum.jpg` die Vorlagen auf der Vorlesungswebseite. Zur Berechnung der Singulärwertzerlegung können Sie die Funktionen `svd` (Matlab) und `numpy.linalg.svd` (Python) verwenden.

Projekt 2 (6 Punkte)**.** Eine Firma stellt m verschiedene Produkte her, für deren Fertigung n Maschinen benötigt werden. Die j-te Maschine hat eine maximale monatliche Laufzeit von l_j Stunden. Das k-te Produkt generiert pro Mengeneinheit einen Ertrag von e_k Euro und belegt die j-te Maschine für t_{jk} Stunden pro Mengeneinheit. Der monatliche Gesamtertrag soll ohne Überschreitung der Maximallaufzeiten optimiert werden.

(1) Formulieren Sie den beschriebenen Sachverhalt als Maximierungsproblem mit Nebenbedingungen in der Form

$$\text{Maximiere } f(x) = c \cdot x \text{ unter den Bedingungen } Ax \leq b, x \geq 0$$

wobei $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ die monatlichen Mengeneinheiten der verschiedenen Produkte seien und die Ungleichungen komponentenweise zu verstehen sind.

(2) Verwenden Sie `linprog` (Matlab) bzw. `scipy.optimize.linprog` (Python), um das Problem für die Daten $m = 2, n = 3, e_1 = 300, e_2 = 600$, und $t_{11} = 1, t_{21} = 2, t_{31} = 0, t_{12} = 3, t_{22} = 1, t_{32} = 2$ sowie $l_1 = 150, l_2 = 180, l_3 = 140$ zu lösen. Wie groß ist der optimale monatliche Ertrag?