

Theorie und Numerik retardierter
Integralgleichungen
elektromagnetischer Streufelder

Diplomarbeit

von

Sören Bartels

bei

Prof. Dr. C. Carstensen

Juni 1999

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Lehrstuhl für Wissenschaftliches Rechnen



Einleitung

Die heutigen schnellen Computer erlauben es, eine Vielzahl von Vorgängen in der Natur oder in der Industrie zu simulieren. Numerische Simulationen auf modernen Rechnerarchitekturen gestatten präzise quantitative Vorhersagen, die experimentell gar nicht oder nur mit extremem zeitlichen und finanziellen Aufwand zu erhalten sind: Beispiele sind Crash-Tests in der Automobilindustrie, Flugsimulationen in Luft- und Raumfahrt, Chip-Design in der Mikroelektronik oder Computertomographie in der Medizin. Tatsächlich werden diese modernen Simulationen nicht nur durch die exponentiell wachsende Hardwareperformance sondern auch und gerade durch schnelle Algorithmen und optimierte mathematische Verfahren möglich. Für stationäre Probleme finden sich in der Literatur zahlreiche Arbeiten zur zuverlässigen, effizienten Berechnung wohingegen instationäre Simulationen durch die rasende Software- und Hardware-Entwicklung erst mehr und mehr realisiert und analysiert werden.

Die vorliegende Arbeit ist der Mathematik elektromagnetischer Streufelder im zeitabhängigen Fall gewidmet, wie sie in einer Vielzahl von realen Prozessen auftreten. Immer dann, wenn ein Feld oder eine Welle auf ein Objekt trifft, wird eine reflektierte Welle zurückgeworfen: In der Radiologie, in gestreuten akustischen Signalen, z.B. Ultraschall-Untersuchungen oder Elektrosmog, werden aus der gemessenen reflektierten Welle Informationen über das reflektierende Objekt gewonnen. Eine Skizzierung dieser Situation ist in Abbildung 1 gezeigt.

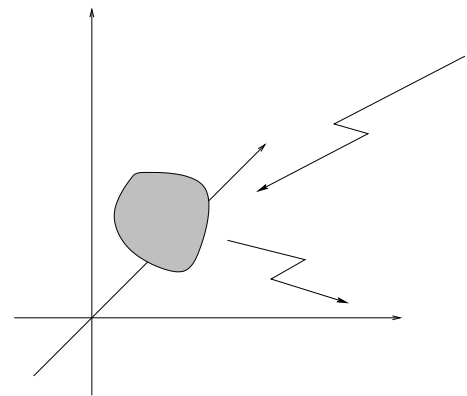


Abbildung 1 Reflexion eines einfallenden Feldes

Ausgehend von der mathematischen Modellierung des physikalischen Vorgangs in Kapitel 1 wird die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der resultierenden Gleichungen im zweiten Kapitel für einen Spezialfall und im vierten Kapitel für das Modellproblem untersucht. Es wird ferner eine Zeit-Raum Variationsformulierung studiert, die die numerische Simulation der Situation ermöglicht. An verschiedensten Beispielen werden die Algorithmen getestet und auf ihre praktische 'Verwendbarkeit' hin untersucht. Die Algorithmen und numerischen Ergebnisse finden sich in den Kapiteln 3 und 5.

Elektromagnetische Felder werden durch die Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik beschrieben. Dabei sind vom Medium abhängige Konstanten zu berücksichtigen. Liegen zwei unterschiedliche Medien vor, die durch eine gemeinsame Grenzschicht getrennt sind, so werden die das Feld beschreibenden Quantitäten im allgemeinen unstetig sein. Genau diese Unstetigkeiten beschreiben die in der untersuchten Situation relevanten physikalischen Größen: Trifft ein elektromagnetisches Feld auf eine leitende Oberfläche, so werden auf dieser ein Oberflächenstrom und

eine –ladung induziert, die das gestreute Feld in eindeutiger Weise beschreiben. Abstrakt ist das Modellproblem als ein System partieller Differentialgleichungen mit einer Transmissionsbedingung zu erfassen.

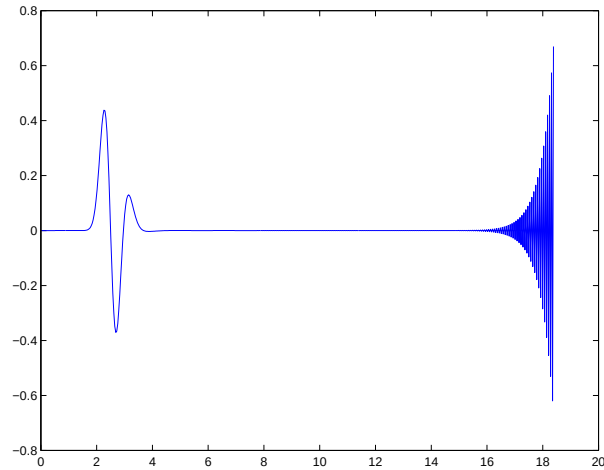


Abbildung 2 Numerische Lösung der instabilen Kollokationsmethode. Gezeigt ist die induzierte Dichte am Mittelpunkt einer reflektierenden Oberfläche

Zur rigorosen Analyse der Gleichungen wird der skalare Fall betrachtet, das heißt es wird ein Transmissionsproblem für die Wellengleichung in drei Raumdimensionen untersucht. Eine Spektraltransformation überführt die Wellengleichung in eine durch die Transformationsvariable parametrisierte Familie von Helmholtz-Gleichungen. Um Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen dieses zeitharmonischen Problems zu beweisen muß die Transformationsvariable aus der oberen komplexen Halbebene gewählt werden. Diese Forderung vermeidet das Auftreten von Singularitäten durch Eigenwerte des Laplace Operators und ermöglicht außerdem Normabschätzungen, die die Abhängigkeit von der Variablen beschreiben. Ausgehend von der Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung wird eine Darstellungsformel hergeleitet. In dieser Formel treten Randintegrale auf, in denen das Integrationsgebiet die reflektierende Oberfläche ist und in den Integranden die induzierten Oberflächenquantitäten auftauchen. Die Darstellungsformel führt auf einen Randintegraloperator, dessen Abbildungseigenschaften analysiert werden. Mittels der Fourier-Laplace-Transformation läßt sich dieser Operator auf den zeitabhängigen Fall übertragen. Die Holomorphie und die Vertauschbarkeit mit der Transformation des schwach singulären Integraloperators sind die kritischen Punkte der mathematischen Analyse. Die wesentliche Eigenschaft des Operators, die Elliptizität, überträgt sich auf den zeitabhängigen Fall. Mathematische Werkzeuge beim Übergang vom Frequenz- zum Zeitraum sind dabei die Parsevalsche Formel sowie eine Version des Satzes von Paley-Schwartz-Wiener für temperierte Distributionen.

Die Elliptizität des (zeitabhängigen) Randintegraloperators ermöglicht die Umformulierung des Problems als Randintegralgleichung, die als retardierte, das heißt zeitlich verzögerte, Potentialintegralgleichung bezeichnet wird. Die Zeitverzögerung wird sich in der numerischen Behandlung als wesentliche Schwierigkeit herausstellen.

Approximations- und Interpolationsaussagen in verallgemeinerten Sobolev-Räumen erlauben eine a priori Fehleranalyse des neu formulierten Problems. Für lineare Ansatzfunktionen im Ort und quadratische Funktionen in der Zeit ergibt sich unter der Annahme, daß die Diskretisierung der Integralgleichung exakt erfolgt, eine Konvergenzordnung $O(h)$. In der Praxis ist es im allgemeinen nicht möglich oder zu aufwendig, eine exakte Diskretisierung durchzuführen. Durch Approximationen treten Instabilitäten auf.

Zur rigorosen Analyse der Gleichungen wird der skalare Fall betrachtet, das heißt es wird ein Transmissionsproblem für die Wellengleichung in drei Raumdimensionen untersucht. Eine Spektraltransformation überführt die Wellengleichung in eine durch die Transformationsvariable parametrisierte Familie von Helmholtz-Gleichungen. Um Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen dieses zeitharmonischen Problems zu beweisen muß die Transformationsvariable aus der oberen komplexen Halbebene gewählt werden. Diese Forderung vermeidet das Auftreten von Singularitäten durch Eigenwerte des Laplace Operators und ermöglicht außerdem Normabschätzungen, die die Abhängigkeit von der

In den numerischen Experimenten zum skalaren Problem wird zunächst einer Kollokationsmethode von Davies und Duncan [DaDu] gefolgt. Diese stellt sich, wie beispielhaft in Abbildung 2 zu sehen ist, als instabil, das heißt der Fehler der numerischen Approximation wächst mit der Zeit, heraus und rechtfertigt so aufwendigere und mathematisch besser erfassbare Variationsformulierungen. Das entsprechende Galerkin-Schema zeichnet sich in den Beispielen durch überraschend gute Stabilitätseigenschaften aus. Die stabile numerische Lösung in Abbildung 3 zeigt ein physikalisch sinnvolles Abklingverhalten.

Beide Diskretisierungsansätze führen auf Konvolutionssummen, aus denen sich ein im allgemeinen implizites Zeitschrittverfahren herleiten läßt und die deutlich die Physik der Wellengleichung widerspiegeln. Eine diskrete Fourier-Transformation erlaubt schließlich die Berechnung von Amplifikationsfaktoren, deren Beschränktheit die numerische Stabilität indiziert. Der Stabilitätstest zeigt die nahezu uneingeschränkte Stabilität des Galerkin-Schemas und erkennt die instabilen Frequenzen der Kollokationsmethode.

Mit dem Galerkin-Schema steht damit ein Verfahren zur Verfügung, dessen hohe Stabilitätseigenschaften bisher nur durch verschiedene, schwer motivierbare Modifikationen der Algorithmen aus den Kollokationsmethoden erreicht werden konnten. Als Nachteil des Galerkin-Schemas erweisen sich neben den hohen numerischen Kosten auch die nicht optimalen Approximationseigenschaften. In der Arbeit werden verschiedenste Modifikationen zur Verbesserung der Approximationseigenschaften und Reduktion des numerischen Aufwands vorgestellt und deren Auswirkungen auf die Stabilitäts- und Konvergenzeigenschaften analysiert. Es kann abschließend kein optimaler Algorithmus angegeben werden, jedoch einer, der vernünftige Approximationen liefert und nur auf sehr feinen, kaum berechenbaren Netzen instabil wird. Abschließend werden Diskretisierungen höherer Ordnung diskutiert.

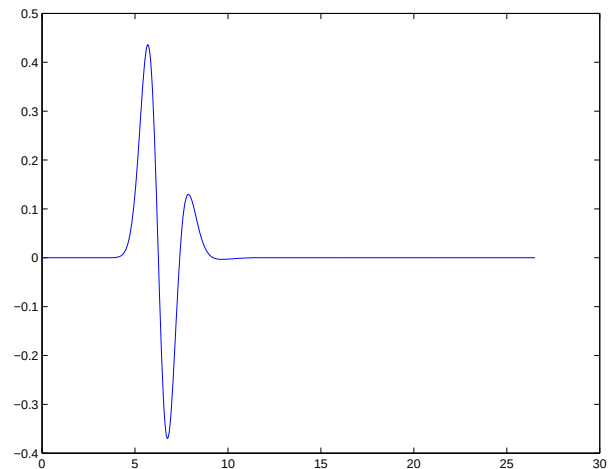


Abbildung 3 Numerische Lösung des stabilen Galerkin-Schemas. Wieder ist die induzierte Dichte am Mittelpunkt der Oberfläche gezeigt

Die Analyse des vollständigen Problems, das heißt im wesentlichen des vektorwertigen Falls, läßt sich wie die Analyse des skalaren Falls durchführen, es sind jedoch zwei gekoppelte Felder zu betrachten und statt eines Gradienten ist der auftretende Differentialoperator die Rotation. Im Hinblick auf die von den Oberflächenquantitäten erfüllte Ladungserhaltungsgleichung müssen Oberflächendifferentialoperatoren und korrespondierende Spurräume betrachtet werden. Wiederum läßt sich eine Zeit-Raum Variationsformulierung für die sogenannte Feldintegralgleichung, die eine Kombination zweier retardierter Potentialgleichungen ist, herleiten.

Die Diskretisierung der Feldintegralgleichung erfolgt wie im Fall der Potentialintegralgleichung. Es ist überraschend, daß die resultierenden Algorithmen extrem instabil und damit kaum brauchbar sind. Aufgrund dieser Tatsache wird zur praktischen Berechnung die Feldintegralgleichung zerlegt und ein System zweier partieller Differentialgleichungen und zweier retardierter Potentialintegralgleichungen betrachtet. Hier lassen sich die Erkenntnisse aus der Analyse im skalaren Fall direkt und erfolgreich verwenden. Ein Algorithmus von Rynne [RySm] kann durch Behandlung der Integralgleichung mit Galerkin-Methoden stabilisiert werden, ohne den Ausgangsalgorithmus zu modifizieren. Abbildung 4 zeigt den auf einer Oberfläche induzierten Strom. Da dieser Algorithmus jedoch sehr speziell ist und nur auf achsenparallelen Oberflächen verwendet werden kann, wird zum Schluß einer Diskretisierungsmethode von Davies [Da4] gefolgt. Diese verwendet ein vektorwertiges Raviart-Thomas Element, das der Physik des Problems gut angepaßt ist.

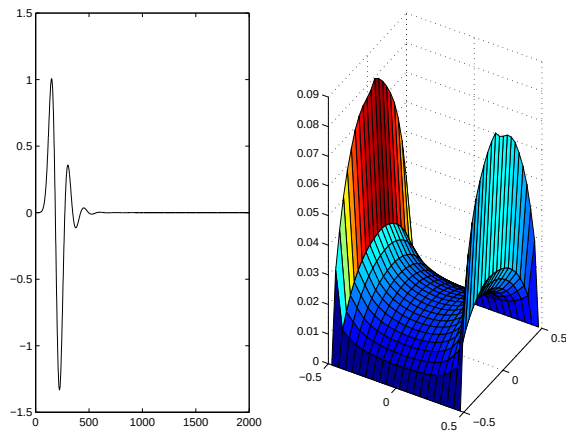


Abbildung 4 Stabile Lösung für die Feldintegralgleichung. Die y -Komponente des Oberflächenstroms am Mittelpunkt der reflektierenden Oberfläche (links) und dieselbe Komponente nach 480 Zeitschritten (rechts)

Die vorliegende Arbeit ist die Fortsetzung einer Master-Arbeit [B], die ich an der Heriot-Watt Universität in Edinburgh verfaßt habe. Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. C. Carstensen für zahlreiche Ratschläge, anregende Diskussionen und die Betreuung meiner Diplomarbeit. Ich möchte mich an dieser Stelle auch bei Dr. D. B. Duncan und Dr. P. J. Davies für die Ausstattung mit umfangreichem Material zur Theorie und Numerik der betrachteten Integralgleichungen sowie für die Betreuung meiner Master-Arbeit bedanken. Weiterer Dank gilt allen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Wissenschaftliches Rechnen der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel: Herrn MSc J. Alberty für seine Unterstützung bei $\text{\LaTeX}$ -Problemen, Herrn Dr. S. A. Funken

für die Hilfe bei der Erstellung einer Sparse-Bibliothek in der Programmiersprache C , Herrn Dipl.-Phys. A. Hecht für Ratschläge zum besseren Verständnis der Physik, Herrn Dr. A. Prohl für zahlreiche Diskussionen zu verschiedensten Themen, Frau G. Thiel für die Unterstützung bei organisatorischen Problemen sowie Herrn Dipl.-Math. D. Zarrabi für die Beratung bei technischen Problemen. Dem Deutschen Akademischen Austauschdienst danke ich für die Ermöglichung zweier Gastaufenthalte in Schottland zum wissenschaftlichen Austausch mit den oben genannten Personen im Rahmen des internationalen Forschungsprojekts 'Numerik zeitabhängiger Randintegralgleichungen'.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
Inhaltsverzeichnis	11
1 Formulierung des Modellproblems	13
1.1 Das elektrische Feld	13
1.2 Das magnetische Feld	15
1.3 Elektromagnetische Induktion	17
1.4 Ladungserhaltung und das Ampère–Maxwellsche Gesetz	18
1.5 Die Maxwellschen Gleichungen als Erhaltungsgesetze	19
1.6 Konsequenzen der Maxwellschen Gleichungen	20
1.6.1 Konstitutive Beziehungen	20
1.6.2 Erhaltung elektrischer Ladung	21
1.6.3 Transmissionsbedingungen	21
1.6.4 Dimensionslose Gleichungen	23
1.7 Mathematische Modellierung elektromagnetischer Streufelder	24
1.8 Potentialdarstellung elektromagnetischer Felder	26
2 Analyse der retardierten Potentialintegralgleichung	31
2.1 Die Helmholtz–Gleichung mit komplexem Parameter	31
2.1.1 Existenz und Eindeutigkeit	32
2.2 Operatoren bezogen auf die Helmholtz–Gleichung	36
2.2.1 Der Dirichlet–Neumann Operator N_ω	36
2.2.2 Fundamentallösung der Helmholtz–Gleichung und Darstellungsformel	38

2.2.3	Der Neumann–Dirichlet Operator S_ω	45
2.3	Die Fourier–Laplace Transformation	46
2.3.1	Fundamentale Aussagen	46
2.3.2	Verallgemeinerte Sobolev–Räume	49
2.4	Variationsformulierung für die retardierte Potentialintegralgleichung	50
2.5	Diskretisierung des Schemas	55
2.5.1	Diskretisierung im Ort	55
2.5.2	Diskretisierung in der Zeit	56
2.6	A priori Fehleranalyse und Stabilität	57
2.6.1	Ungleichungen in $H_\sigma^m(\Delta t, \mathbb{R})$	57
2.6.2	Interpolation in $H_\sigma^m(\Delta t, \mathbb{R})$	59
2.6.3	Approximation in $H^s(\Gamma)$	60
2.6.4	Stabilität	61
2.6.5	Abschätzungen des Fehlers	62
3	Numerik der retardierten Potentialintegralgleichung	67
3.1	Kollokationsmethode	67
3.2	Ein einfaches Galerkin–Schema	69
3.3	Berechnung des singulären Integrals	74
3.3.1	Analytische Berechnung	74
3.3.2	Quadraturformeln für singuläre Integrale	75
3.4	Numerische Stabilität	78
3.4.1	Notationen und Definitionen	79
3.4.2	Algorithmen in Shift–Operator Notation	80
3.4.3	Fourier–transformierter Algorithmus und L^2 –Stabilität	82
3.4.4	L^∞ –Stabilität	83
3.4.5	Numerische Ergebnisse der Stabilitätstests	84
3.5	Diskussion des numerischen Aufwands	84

3.5.1	Numerische Kosten	84
3.5.2	Ein numerisch günstigerer Algorithmus	86
3.6	Andere Approximationen	87
3.6.1	Verwenden einer Quadraturformel für das singuläre Integral	87
3.6.2	Einführung eines Glättungsschritts	88
3.6.3	Verbesserte Approximation des Zeitintegrals	90
3.6.4	Auslassen des Integrationsschritts	91
3.6.5	Verbesserte Behandlung benachbarter Dreiecke	92
3.6.6	Zusammenfassung der Ergebnisse	93
3.7	Diskretisierungen höherer Ordnung	95
3.7.1	$(P1, P1)$ -Diskretisierung	95
3.7.2	$(P1, P2)$ -Diskretisierung	98
3.8	Konvergenzuntersuchungen	99
3.9	Numerisches Beispiel im Fall einer gekrümmten Oberfläche	100
4	Analyse der Feldintegralgleichung	103
4.1	Oberflächendifferentialoperatoren und Spurräume	103
4.2	Existenz und Eindeutigkeit	106
4.3	Darstellung des elektrischen Feldes und Randintegralgleichung	109
4.4	Rücktransformation und Variationsformulierung	112
5	Numerik der Feldintegralgleichung	115
5.1	Zerlegung der Feldintegralgleichung	115
5.2	Ein Galerkin-Schema für flache Platten	120
5.3	Behandlung allgemeiner Oberflächen	125
5.4	Ein verifizierter Algorithmus	128
5.4.1	Betrachtete Gleichungen	128
5.4.2	Diskretisierung	129

5.4.3	Grundlegender Algorithmus	130
5.4.4	Modifikationen	132
Anhang A: Programmcodes		135
A.1	Programm für die retardierte Potentialintegralgleichung	135
A.1.1	Das Hauptprogramm	135
A.1.2	Die Unterprogramme	136
A.1.2.1	Berechnen der Quadraturformeln	136
A.1.2.2	Assemblierung der Zeitschrittmatrizen	138
A.1.3	Die rechte Seite	142
A.1.4	Ausgabe der Lösung	143
A.2	Programm zum Stabilitätstest	143
A.3	Programm für die elektrische Feldintegralgleichung	146
A.3.1	Das Hauptprogramm	146
A.3.2	Verschiedene Unterprogramme zur Verwaltung des Netzes	148
A.3.2.1	Erzeugen von Kantennummern	148
A.3.2.2	Berechnen der Flächeninhalte	148
A.3.2.3	Beziehungen zwischen Kanten und Elementen	148
A.3.2.4	Kantennormalen	149
A.3.3	Programme zur Erstellung der Zeitschrittmatrizen	150
A.3.3.1	Matrizen für die retardierte Potentialintegralgleichung	150
A.3.3.2	Matrizen für die vektorwertige Integralgleichung	151
A.3.3.3	Aufstellen der restlichen Matrizen	152
A.3.4	Verschiedene Modifikationsprozeduren	156
A.3.4.1	Filtern der Ladung	156
A.3.4.2	Filtern des Stroms	156
A.3.5	Die rechte Seite	157
A.3.6	Routinen zur grafischen Darstellung der Lösung	157

A.3.6.1	Ausgabe des Stroms nahe des Mittelpunktes	157
A.3.6.2	Ausgabe des Vektorfeldes	158
Anhang B: Eine C–Bibliothek für spärlich besetzte Matrizen		159
Literaturverzeichnis		165
Eidesstattliche Erklärung		167



Kapitel 1

Formulierung des Modellproblems

In diesem Kapitel wird eine kurze Illustration der Maxwellschen Gleichungen gegeben. Aufbauend darauf wird die Modellsituation elektromagnetischer Streufelder formuliert. Details zu den Maxwellschen Gleichungen finden sich beispielsweise in [AlFi], [Jo], [Wa].

1.1 Das elektrische Feld

Elektrisch geladene Körper üben Kräfte aufeinander aus. Diese elektrische Erscheinung ist wohlbekannt als eine Kraft, die ohne Vermittlung des Zwischenraumes von einem Körper auf einen anderen wirkt. Die elektrischen Kräfte werden beschrieben als Kräfte des *elektrischen Feldes* auf elektrisch geladene Körper. Sind Stärke und Richtung des elektrischen Feldes in einem Punkt des Raumes bekannt, so lassen sich Vorhersagen über das Verhalten dort befindlicher elektrisch geladener Körper machen.

Will man das elektrische Feld um einen geladenen Körper untersuchen, so muß man Probekörper in das Feld einführen, die sich unter dem Einfluß der elektrischen Kraft bewegen können. Definiert man die elektrische Feldstärke als Quotient der Kraft, die ein positiv geladener Körper im betrachteten Feldpunkt erfährt, und seiner Ladung, so zeigen physikalische Experimente die folgende Beobachtung.

Physikalische Beobachtung I. Die Feldstärke E in einem Punkt eines radialsymmetrischen Feldes ist proportional zur Ladung des Körpers und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands zum Körper, d.h.

$$E(x) = cQ \frac{|x - y|}{|x - y|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{y\},$$

sofern der das elektrische Feld erzeugende Körper die Ladung Q trägt und sich am räumlichen Punkt $y \in \mathbb{R}^3$ befindet.

Der Proportionalitätsfaktor c wird ersetzt durch $\frac{1}{4\pi\epsilon}$ mit der vom Medium abhängigen Dielektrizitätskonstanten ϵ , die im Fall des Vakuums gegeben ist durch

$$\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Vm}$$

und als elektrische Feldkonstante bezeichnet wird.

Beispiel 1.1.1. Im Radialfeld, d.h. im elektrischen Feld einer positiv geladenen Kugel, nimmt die Feldstärke symmetrisch nach außen hin ab, wie die Abbildung 1.1 veranschaulichen soll.

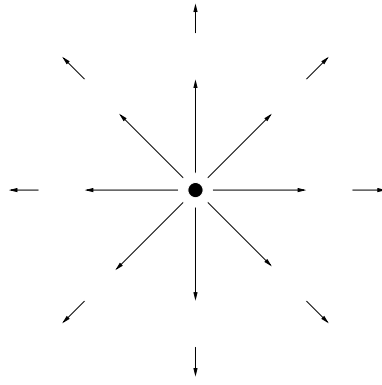


Abbildung 1.1 Radialfeld einer positiv geladenen Kugel

Für das elektrische Feld gilt der Gaußsche Satz, der eine Beziehung zwischen dem *elektrischen Fluß* durch eine Oberfläche und den das Feld erzeugenden Ladungen angibt.

Satz 1.1.1 (Gaußsches Gesetz). Es sei Ω ein beschränktes Lipschitzgebiet und E das von den in den Punkten $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$ positionierten Ladungen $q_1, \dots, q_k$ erzeugte elektrische Feld, d.h.

$$E(x) = \sum_{j=1}^k \frac{q_j}{4\pi\epsilon} \frac{x - a_j}{|x - a_j|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{a_1, \dots, a_k\}.$$

Dann gilt das Gaußsche Gesetz

$$\int_{\partial\Omega} E \cdot n \, ds = \frac{1}{\epsilon} \sum_{a_j \in \Omega} q_j.$$

Beweis. Durch direktes Nachrechnen verifiziert man $\operatorname{div} \frac{x-a_j}{|x-a_j|^3} = 0$ für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$. Im Fall $a_j \notin \Omega$, $j = 1, \dots, n$, kann das Divergenztheorem direkt auf Ω und E angewendet werden. Im Fall, daß nur $a_1 \in \Omega$ gilt, sei eine Kugel $\overline{B_r(a_1)} \subset \Omega$ gewählt und definiere $\Omega_{a_1} := \Omega \setminus \overline{B_r(a_1)}$. Das Divergenztheorem kann nun auf Ω_{a_1} und E angewendet werden und impliziert die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_{a_1}} \operatorname{div} E \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega_{a_1}} E \cdot n \, ds \\ &= \int_{\partial\Omega} E \cdot n \, ds + \int_{\partial B_r(a_1)} E \cdot n \, ds. \end{aligned}$$

Auf $\partial B_r(a_1)$ ist die äußere Normale gegeben durch $n(x) = -\frac{1}{r}(x - a)$ und damit folgt

$$\int_{\partial\Omega} E \cdot n \, ds = \frac{q_1}{4\pi\epsilon} \int_{\partial B_r(a_1)} \frac{|x - a_1|^2}{r|x - a_1|^3} \, ds = \frac{q_1}{4\pi\epsilon r^2} \int_{\partial B_r(a_1)} 1 \, ds = \frac{q_1}{\epsilon}.$$

Dies beweist die Behauptung für den Fall $a_1 \in \Omega$. Die allgemeine Aussage folgt analog. $\square$

Die Ladung q eines Körpers kann allgemeiner gegeben sein durch eine *Ladungsdichte* ρ . Das elektrische Feld ergibt sich dann als

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{D_\rho} \frac{\rho(y) \cdot (x - y)}{|x - y|^3} \, dy,$$

wobei D_ρ die Region ist, die von dem die Ladungsdichte ρ enthaltenden Körper eingenommen wird. In diesem Fall lautet das Gaußsche Gesetz

$$\int_{\partial\Omega} E \cdot n \, ds = \int_{\Omega} \rho \, dx.$$

In der Situation kontinuierlich bewegter elektrischer Ladungen ist der *Stromfluß* j definiert als die Ladung, die durch ein Flächenstück ΔA pro Zeiteinheit Δt fließt, d.h.

$$j = nqv \frac{\Delta A}{\Delta t},$$

wobei n die Anzahl der Partikel, q deren Ladung und v deren Geschwindigkeit ist. Das *Ohmsche Gesetz* besagt nun, daß in einem elektrischen Leiter, wie beispielsweise Metall, der Stromfluß proportional zum elektrischen Feld ist, d.h. $j = \sigma E$. Dabei ist σ die *Konduktivität* des Leiters, die im Fall perfekt leitender Materialien gleich unendlich ist, was bedeutet, daß das elektrische Feld verschwindet.

1.2 Das magnetische Feld

Ähnlich wie elektrisch geladene Körper zeigen auch magnetische Körper Wechselwirkungen. Nicht nur Magneten erzeugen Kraftfelder, die auf andere Magneten wirken, auch stromdurchflossene Leiter erregen ein solches Feld. Umgekehrt werden auch bewegte elektrisch geladene Teilchen durch *Magnetfelder* beeinflußt. Zur quantitativen Erfassung des magnetischen Feldes untersucht man die Kraftwirkung des Feldes auf einen stromdurchflossenen Leiter. Der Leiter übernimmt hier die Rolle des beim elektrischen Feld verwendeten Probekörpers. Mit Eisenfeilspäne lassen sich magnetische Felder sichtbar machen. Die sich bildenden Linien werden als *Feldlinien des magnetischen Feldes* bezeichnet.

Analog zum elektrischen Feld soll ein Vektorfeld B definiert werden, dessen Richtung in jedem Punkt tangential zu den Feldlinien liegt und dessen Betrag ein Maß für die Stärke des Feldes ist. Die Orientierung wird so festgelegt, daß die Richtung des Vektors B in einem Punkt die Richtung ist, in die sich der Südpol einer dort frei beweglich aufgestellten Magnetnadel einstellt. Mit diesen Konventionen läßt sich die folgende Beobachtung machen.

Physikalische Beobachtung IIa. Die Kraft F eines magnetischen Feldes, die auf einen senkrecht zu den Feldlinien stehenden stromdurchflossenen Leiter wirkt, ist proportional zur Länge l und Stromstärke I des Leiters,

$$|F| = cIl.$$

Die Kraft steht sowohl senkrecht auf dem Leiter als auch auf dem magnetischen Feld.

Die *magnetische Flußdichte* ist definiert als der von den Eigenschaften des Leiters unabhängige Quotient $|F|/(Il)$. Der Betrag des magnetischen Vektorfeldes ist gleich der magnetischen Flußdichte.

Für das Magnetfeld erzeugt durch einen langen, geraden stromdurchflossenen Leiter lassen sich die folgenden Eigenschaften experimentell nachweisen.

Physikalische Beobachtung IIb. Die magnetische Flußdichte im Abstand r von einem langen, geraden, vom Strom I durchflossenen Leiter mit kleinem Querschnitt ist proportional zu I und umgekehrt proportional zu r , d.h.

$$|B| = c \frac{I}{r}.$$

Die Richtung des magnetischen Feldes im Abstand r zum Leiter ist tangential zu einer Kreislinie, die in jedem Punkt den Abstand r zum Leiter hat (vergleiche Abbildung 1.2). Hier wird die

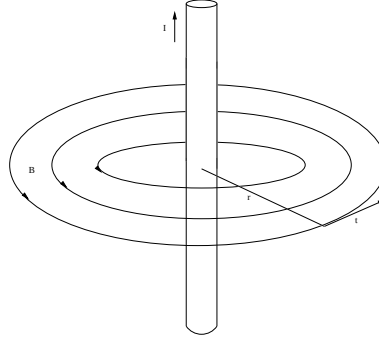


Abbildung 1.2 Magnetisches Feld eines langen, geraden stromdurchflossenen Leiters

Proportionalitätskonstante c ersetzt durch $\mu/(4\pi)$ mit der vom Medium abhängigen Permeabilitätskonstanten μ , die für Vakuum gegeben ist durch $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/(Am)}$.

Für allgemeine stromdurchflossene Leiter läßt sich die Beziehung

$$B(x) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{D_j} \frac{j \times (x - y)}{|x - y|^3} dy,$$

nachweisen. Dabei ist j der Stromfluß im Körper, der die Region D_j einnimmt. Man rechnet leicht nach, daß diese Gleichung mit den Aussagen aus IIb verträglich ist. Für das magnetische Feld gilt das *Ampèresche Gesetz*, das auch als Durchflutungssatz bezeichnet wird.

Satz 1.2.1 (Ampèresches Gesetz I). Für ein beschränktes Lipschitzgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ gilt das *Ampèresche Gesetz*,

$$\int_{\partial\Omega} B \cdot n \, ds = 0.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{D_j} \frac{j \times (x - y)}{|x - y|^3} dy \\ &= -\frac{\mu}{4\pi} \int_{D_j} j \times \text{grad}_y \frac{1}{|x - y|} dy \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \text{curl}_x \int_{D_j} \frac{j}{|x - y|} dy. \end{aligned}$$

Mit $\text{div curl} \equiv 0$ und dem Divergenztheorem folgt die Behauptung. □

Die folgende Version des Ampèreschen Gesetzes wird später benötigt werden.

Satz 1.2.2 (Ampèresches Gesetz II). Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Oberfläche, die durch den geschlossenen Pfad L berandet ist. Es gelte $j \cdot n = 0$ auf ∂D_j und $\operatorname{div} j = 0$ in D_j . Die Zirkulation des magnetischen Feldes entlang L ist dann gegeben durch

$$\int_L B \cdot dl = \mu \int_S j \cdot n \, ds.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \int_{D_j} \frac{j}{|x-y|} \, dy &= \int_{D_j} j \cdot \operatorname{grad}_x \frac{1}{|x-y|} \, dy \\ &= - \int_{D_j} j \cdot \operatorname{grad}_y \frac{1}{|x-y|} \, dy \\ &= - \int_{D_j} \operatorname{div}_y \frac{j}{|x-y|} \, dy \\ &= - \int_{\partial D_j} \frac{j}{|x-y|} \cdot n \, ds_y \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichung die Annahme, daß $j \cdot n = 0$ auf ∂D_j gilt, ausgenutzt wurde. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt insbesondere, daß

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} B &= \frac{\mu}{4\pi} \operatorname{curl} \left(\operatorname{curl} \int_{D_j} \frac{j}{|x-y|} \, dy \right) \\ &= -\frac{\mu}{4\pi} \operatorname{div} \left(\operatorname{grad} \int_{D_j} \frac{j}{|x-y|} \, dy \right) + \frac{\mu}{4\pi} \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \int_{D_j} \frac{j}{|x-y|} \, dy \right) \\ &= \mu j(x), \end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, daß für eine stetige Funktion h gilt $\operatorname{div} \left(\operatorname{grad} \int_{D_h} \frac{h(y)}{|x-y|} \, dy \right) = -4\pi h(x)$. Der Stokessche Integralsatz impliziert die behauptete Identität

$$\int_L B \cdot dl = \int_S \operatorname{curl} B \cdot n \, ds = \mu \int_S j \cdot n \, ds.$$

□

1.3 Elektromagnetische Induktion

Im vorigen Abschnitt wurde illustriert, daß elektrische Ströme magnetische Felder erzeugen. Faraday ging der umgekehrten Fragestellung nach: Können magnetische Felder elektrische Ströme erzeugen. Nach langjährigen Experimenten machte er die entscheidende Entdeckung: Nicht durch die bloße Existenz eines Magnetfeldes wird in einem Leiter ein elektrischer Strom hervorgerufen (induziert), sondern durch die zeitliche Veränderung eines Magnetfeldes. Man nennt diese Erscheinung *Induktion*.

Experimente, in denen ein Magnet durch eine Spule bewegt wird und eine sogenannte *Induktionsspannung* erzeugt, zeigen die folgenden Ergebnisse.

Physikalische Beobachtung III. Die Induktionsspannung U_i ist das Produkt aus der Windungszahl k und der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses Φ durch die von der Spule berandete Oberfläche S , d.h. $\Phi = \Delta S B \cdot n$, wenn n der Normalenvektor und ΔS das Oberflächenmaß von S sind,

$$U_i = -k \frac{d\Phi}{dt}.$$

Ferner läßt sich die *Lenzsche Regel* verifizieren: Der *Induktionsstrom* ist stets so gerichtet, daß er der Ursache seiner Entstehung entgegenwirkt.

Werden im Fall einer Windung die Enden der Spule kurzgeschlossen, so fließt in ihr ein elektrischer Strom, d.h. Elektronen bewegen sich in einem elektrischen Feld. Die elektrische Feldstärke dieses Feldes ist durch den Quotienten der Spannung U_i und die Länge l des kreisförmigen Leiters gegeben. Damit läßt sich das Induktionsgesetz in anderer Form schreiben,

$$|E|l = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Allgemeiner gilt das *Faraday-Henrysche Gesetz* der elektromagnetischen Induktion,

$$\int_L E \cdot dl = -\frac{d}{dt} \int_S B \cdot n \, ds$$

dessen Gültigkeit in Versuchen mit einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld wie in Abbildung 1.3 nachgewiesen wird.

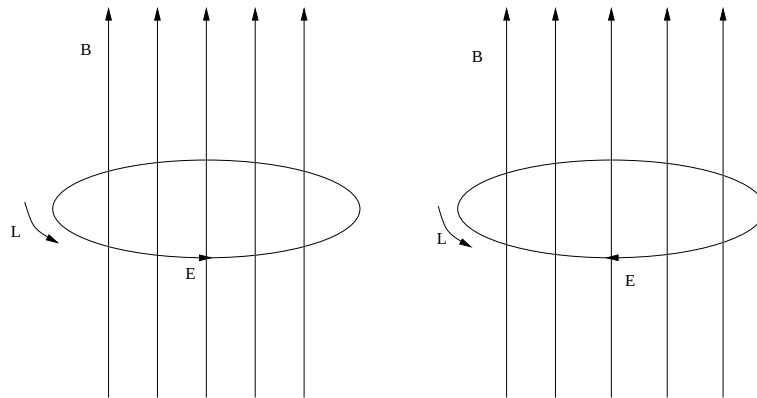


Abbildung 1.3 Elektrisches Feld erregt durch ein instationäres Magnetfeld für $\frac{d}{dt} \int_S B \cdot n \, ds$ positiv (links) und negativ (rechts)

1.4 Ladungserhaltung und das Ampère-Maxwellsche Gesetz

Grundlegende Annahme dieses Abschnittes ist, daß in allen Prozessen, die im Universum auftreten, der Gesamtbetrag elektrischer Ladung konstant ist, oder mit anderen Worten, daß elektrische Ladung erhalten wird. Mathematisch bedeutet diese Annahme, daß die Veränderung der Gesamtladung in einem beliebigen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ zu einem Zeitpunkt gleich der Differenz von herein- und herausfließendem Strom ist,

$$-\frac{dq}{dt} = \int_{\partial\Omega} j \cdot n \, ds.$$

Nach dem Gaußschen Gesetz gilt für das elektrische Feld

$$q = \epsilon \int_{\partial\Omega} E \cdot n \, ds,$$

und damit folgt die Erhaltungsgleichung

$$\int_{\partial\Omega} j \cdot n \, ds + \epsilon \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega} E \cdot n \, ds = 0, \quad (1.1)$$

die im stationären Fall

$$\int_{\partial\Omega} j \cdot n \, ds = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{div} j = 0$$

lautet. Die zweite Version des Ampèreschen Gesetzes besagte in dieser Situation, daß für eine Oberfläche S mit Rand L die Zirkulation des magnetischen Feldes entlang L gegeben ist durch

$$\int_L B \cdot dl = \mu \int_S j \cdot n \, ds. \quad (1.2)$$

In Abschnitt 1.2 wurde illustriert, daß Ströme magnetische Felder erzeugen und daher liegt die Vermutung nahe, daß im Falle eines instationären elektrischen Feldes das magnetische Feld nicht mehr zeitlich konstant sein wird. Dies läßt sich experimentell auch zeigen. Durch Vergleichen der Erhaltungsgleichungen kam Maxwell auf die Idee, die rechte Seite der Identität (1.2) durch den entsprechenden Term der zeitabhängigen Aussage (1.1) zu ersetzen und gab eine physikalische Interpretation der resultierenden Gleichung

$$\int_L B \cdot dl = \mu \int_S j \cdot n \, ds + \mu\epsilon \frac{d}{dt} \int_S E \cdot n \, ds,$$

dem *Ampère–Maxwellschen Gesetz*. Experimente, in denen ein elektrisches Feld zwischen den Platten eines Kondensators aufgebaut wird, zeigen, daß dieses Gesetz die instationäre Situation korrekt beschreibt.

1.5 Die Maxwellschen Gleichungen als Erhaltungsgesetze

In den vorigen Abschnitten wurden die folgenden Erhaltungsgesetze für elektromagnetische Felder in einem Gebiet $T \subset \mathbb{R}^3$ für eine Ladungsdichte ρ und einen Stromfluß j illustriert.

$$\int_{\partial\Omega} E \cdot n \, ds = \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \rho \, dx, \quad (1.3)$$

$$\int_{\partial\Omega} B \cdot n \, ds = 0, \quad (1.4)$$

$$\int_L E \cdot dl = -\frac{d}{dt} \int_S B \cdot n \, ds, \quad (1.5)$$

$$\int_L B \cdot dl = \mu \int_S j \cdot n \, ds + \mu\epsilon \frac{d}{dt} \int_S E \cdot n \, ds. \quad (1.6)$$

Dabei ist $\Omega \subset T$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und $S \subset T$ eine glatte Oberfläche deren Rand ein geschlossener Pfad L ist.

Zwar sind die beiden ersten Gleichungen unabhängig von zeitlichen Veränderungen und die zweite sowie dritte homogen, die vier Gleichungen zusammen sind jedoch in Übereinstimmung mit zeitlich-veränderlichen Experimenten.

1.6 Konsequenzen der Maxwellschen Gleichungen

1.6.1 Konstitutive Beziehungen

Lemma 1.6.1. Für stetig differenzierbare Vektorfelder E, B in T , die die Maxwellschen Gleichungen (1.3) - (1.6) erfüllen für alle $S, \Omega \subset T$ mit einem stetigen Vektorfeld j und einer integrierbaren Funktion ρ gilt fast überall in T

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad (1.7)$$

$$\operatorname{div} B = 0, \quad (1.8)$$

$$\operatorname{curl} E + \frac{\partial}{\partial t} B = 0, \quad (1.9)$$

$$\operatorname{curl} B - \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} E = \mu j. \quad (1.10)$$

Beweis. Eine Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf (1.3) und (1.4) mit einem beliebigen Gebiet $\Omega \subset T$ zeigt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} E \, dx = \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \rho \, dx$$

bzw.

$$\int_{\Omega} B \, dx = 0.$$

Da Ω beliebig gewählt war, folgt

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{div} B = 0.$$

In (1.5) und (1.6) sei $S \subset T$ beliebig gewählt. Dann folgt unter Anwendung des Stokesschen Satzes

$$\int_L E \cdot dl = \int_S \operatorname{curl} E \cdot n \, ds,$$

woraus mit (1.5) unmittelbar

$$\int_S \left(\operatorname{curl} E + \frac{\partial}{\partial t} B \right) \cdot n \, ds = 0.$$

folgt. Da die Gleichung für beliebige Oberflächen $S \subset T$ gilt, folgt

$$\operatorname{curl} E + \frac{\partial}{\partial t} B = 0.$$

Analog erhält man

$$\operatorname{curl} B - \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} E = \mu j.$$

□

1.6.2 Erhaltung elektrischer Ladung

Lemma 1.6.2. Für stetig differenzierbare Vektorfelder E, B in T , die die Maxwell'schen Gleichungen (1.3)–(1.6) erfüllen für alle $S, \Omega \subset T$ mit einem stetigen Vektorfeld j und einer integrierbaren Funktion ρ gilt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0.$$

Beweis. Eine Anwendung des Divergenzoperators auf die Gleichung (1.10) gibt, da $\operatorname{div} \operatorname{curl} = 0$,

$$\operatorname{div} j + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} E = 0.$$

Mit (1.7) also

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0.$$

□

1.6.3 Transmissionsbedingungen

In diesem Abschnitt werden Stetigkeits- und Sprungeigenschaften elektromagnetischer Felder über eine zwei verschiedene Medien trennende Grenzschicht hergeleitet. Wesentliche Annahme ist dabei, daß die Erhaltungsgleichungen auch bei der Betrachtung von zwei verschiedenen Medien gültig sind.

Definition 1.6.1 (Oberflächenstrom und -ladungsdichte). Wenn zwei verschiedene Medien ω_1 und ω_2 , in denen jeweils eine Ladung ρ_1 bzw. ρ_2 vorhanden ist, durch eine gemeinsame Grenzschicht γ getrennt sind, so kann auf der Grenzschicht eine *Oberflächenladung* ρ_γ entstehen. Ist dies der Fall, so erfüllen ρ , mit $\rho := \rho_1$ in ω_1 und $\rho := \rho_2$ in ω_2 , und ρ_γ die Beziehung

$$\int_{\omega_1 \cup \omega_2} \rho \, dx = \int_{\omega_1} \rho \, dx + \int_{\omega_2} \rho \, dx + \int_{\gamma} \rho_\gamma \, ds.$$

Analog hat ein auftretender *Oberflächenstrom* j_γ die Eigenschaft

$$\int_{\omega_1 \cup \omega_2} j \, dx = \int_{\omega_1} j \, dx + \int_{\omega_2} j \, dx + \int_{\gamma} j_\gamma \, ds.$$

Bemerkung 1.6.1. Der Strom und die Ladung werden hier global als Distributionen verstanden, während die Felder E, B als integrierbare Funktionen angenommen werden.

Lemma 1.6.3. Es seien E, B Lösungen der homogenen Maxwell'schen Gleichungen in $\Omega \cup \Omega'$ mit $\Omega' := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. Die Funktionen ϵ und μ seien definiert durch $(\mu, \epsilon)|_\Omega \equiv (\mu_\Omega, \epsilon_\Omega)$ und $(\mu, \epsilon)|_{\Omega'} \equiv (\mu_{\Omega'}, \epsilon_{\Omega'})$ sofern $\mu_\Omega, \epsilon_\Omega, \mu_{\Omega'}, \epsilon_{\Omega'}$ die von den Medien abhängigen Konstanten bezeichnen. Ferner sei $\Gamma := \partial\Omega$. Dann gilt:

1. Die tangentielle Komponente des elektrischen Feldes ist stetig in $\mathbb{R}^3$, insbesondere verschwindet der Sprung der tangentialen Komponente des elektrischen Feldes über Γ , d.h. $[E \cdot t]_\Gamma = 0$.
2. Die Normalenkomponente des magnetischen Feldes ist stetig in $\mathbb{R}^3$, insbesondere verschwindet der Sprung der Normalenkomponente des magnetischen Feldes über Γ , d.h. $[B \cdot n]_\Gamma = 0$.
3. Die Oberflächenladung ρ_Γ ist gegeben durch den Sprung der Normalenkomponente des elektrischen Feldes über Γ , d.h. $\rho_\Gamma = -[\epsilon E \cdot n]_\Gamma$.
4. Der Oberflächenstrom j_Γ ist gegeben durch den Sprung der tangentialen Komponente des magnetischen Feldes über Γ , d.h. $j_\Gamma = -\left[\frac{1}{\mu} n \times B\right]_\Gamma$.

Beweis. Es sei $\omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und Σ eine Oberfläche, die ω in zwei Teile ω_1 und ω_2 teilt. ρ_Σ und j_Σ seien die Ladungen, die auf Σ konzentriert sind. Ferner bezeichne B_1 das magnetische Feld in ω_1 und B_2 das in ω_2 und analog seien E_1 und E_2 für E definiert. Es folgt mit (1.6)

$$\int_{\partial\omega} B \cdot n \, ds = \int_{\partial\omega_1} B \cdot n \, ds = \int_{\partial\omega_2} B \cdot n \, ds = 0.$$

Zeigt die Normale auf Σ von ω_1 nach ω_2 , so ist

$$0 = \int_{\partial\omega} B \cdot n \, ds - \int_{\partial\omega_1} B \cdot n \, ds - \int_{\partial\omega_2} B \cdot n \, ds = \int_{\Sigma \cap \omega} (B_2 - B_1) \cdot n \, ds.$$

Weiter gilt mit (1.5)

$$\int_{\partial\omega_1} \epsilon E \cdot n \, ds = \int_{\omega_1} \rho \, dx, \quad \int_{\partial\omega_2} \epsilon E \cdot n \, ds = \int_{\omega_2} \rho \, dx \quad \text{und} \quad \int_{\partial\omega} \epsilon E \cdot n \, ds = \int_{\omega} \rho \, dx.$$

Die Charakterisierung der Oberflächenladung besagt

$$\int_{\omega} \rho \, dx = \int_{\omega_1} \rho \, dx + \int_{\omega_2} \rho \, dx + \int_{\Sigma \cap \omega} \rho_\Sigma \, ds,$$

also

$$\int_{\Sigma \cap \omega} \rho_\Sigma \, ds = \epsilon_2 \int_{\Sigma \cap \omega} E_2 \cdot n \, ds - \epsilon_1 \int_{\Sigma \cap \omega} E_1 \cdot n \, ds.$$

Mit (1.4) und $\int_U \operatorname{curl} E \, dx = \int_{\partial U} E \times n \, ds$ ist

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int_{\omega_1} B \, dx + \frac{d}{dt} \int_{\omega_2} B \, dx - \frac{d}{dt} \int_{\omega} B \, dx \\ &= \int_{\partial\omega} E \times n \, ds - \int_{\partial\omega_1} E \times n \, ds - \int_{\partial\omega_2} E \times n \, ds \\ &= \int_{\Sigma \cap \omega} (E_1 - E_2) \times n \, ds, \end{aligned}$$

während mit (1.3) folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma \cap \Omega} j_{\Sigma} ds &= \int_{\omega} j dx - \int_{\omega_1} j dx - \int_{\omega_2} j dx \\
&= \int_{\omega} j dx - \int_{\omega_1} j dx - \int_{\omega_2} j dx \\
&\quad + \int_{\omega} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} E dx - \int_{\omega_1} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} E dx - \int_{\omega_2} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} E dx \\
&= \int_{\partial \omega} \frac{1}{\mu} n \times B ds - \int_{\partial \omega_1} \frac{1}{\mu} n \times B ds - \int_{\partial \omega_2} \frac{1}{\mu} n \times B ds \\
&= \int_{\Sigma \cap \Omega} - \left[\frac{1}{\mu} n \times B \right] ds
\end{aligned}$$

Da ω beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

1.6.4 Dimensionslose Gleichungen

Im folgenden werden die Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum betrachtet, d.h. Gleichungen (1.7)–(1.10) mit $\epsilon = \epsilon_0$ und $\mu = \mu_0$.

Um ein System von dimensionslosen Gleichungen zu erhalten, werden zunächst die Variablen $\underline{y}$ und τ eingeführt, die zu den Variablen $\underline{x}$ und t wie folgt in Relation stehen,

$$\underline{x} = \alpha \underline{y} \quad \text{und} \quad t = \beta \tau$$

mit $\alpha = 3 \cdot 10^6 m$ und $\beta = 1s$. Weiter werden die physikalischen Größen E, B, j, ρ ersetzt durch

$$\begin{aligned}
\tilde{E}(\underline{y}, \tau) &= E(\underline{x}, t) \frac{1}{3} \cdot 10^{-6} \frac{m}{V}, & \tilde{B}(\underline{y}, \tau) &= B(\underline{x}, t) \frac{m^2}{Vs} \\
\tilde{\rho}(\underline{y}, \tau) &= \rho(\underline{x}, t) \frac{1}{\epsilon} 3 \cdot 10^6 \frac{m^2}{V} & \tilde{j}(\underline{y}, \tau) &= 3 \cdot 10^6 \frac{m^3}{Vs} \mu j(\underline{x}, t).
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\operatorname{div}_y \tilde{E} = \operatorname{div}_x E 3 \cdot 10^6 \frac{m^2}{V} = \rho \frac{3}{\epsilon} 10^6 \frac{m^2}{V} = \tilde{\rho},$$

$$\operatorname{div}_y \tilde{B} = \operatorname{div}_x B 3 \cdot 10^6 \frac{m^2}{Vs} = 0,$$

$$\operatorname{curl}_y \tilde{E} + \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{B} = \operatorname{curl}_x E \frac{m^2}{V} + \frac{\partial}{\partial t} B \frac{m^2}{V} = \left(\operatorname{curl}_x E + \frac{\partial}{\partial t} B \right) \frac{m^2}{V} = 0$$

und mit $1/(\mu\epsilon) = 9 \cdot 10^{12} m^2/s^2$ folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl}_y \tilde{B} - \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{E} &= \operatorname{curl}_x B 3 \cdot 10^6 \frac{m^3}{Vs} - \frac{\partial}{\partial t} E \frac{1}{3} \cdot 10^{-6} \frac{ms}{V} \\
&= \left(\operatorname{curl}_x B - \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} E \right) 3 \cdot 10^6 \frac{m^3}{Vs} = \mu j 3 \cdot 10^6 \frac{m^3}{Vs} = \tilde{j}.
\end{aligned}$$

Zum Schluß seien wieder die alten Variablen betrachtet, d.h. es werden $\tilde{E}, \tilde{B}, \tilde{j}, \tilde{\rho}$ durch E, B, j, ρ und τ durch t sowie $\underline{y}$ durch $\underline{x}$ ersetzt. Dann gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned}\operatorname{div} E &= \rho \\ \operatorname{div} B &= 0 \\ \operatorname{curl} E + \frac{\partial}{\partial t} B &= 0 \\ \operatorname{curl} B - \frac{\partial}{\partial t} E &= j.\end{aligned}$$

Bemerkung 1.6.2. Die Lichtgeschwindigkeit $1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ wurde hier auf den Wert Eins skaliert.

1.7 Mathematische Modellierung elektromagnetischer Streufelder

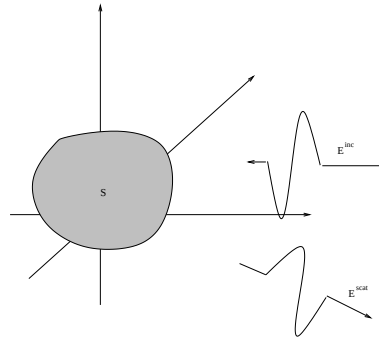


Abbildung 1.4 Einfallendes Feld und Streufeld einer Oberfläche S

Es wird nun die Situation betrachtet, in der ein gegebenes elektromagnetisches Feld E^{inc}, B^{inc} auf eine perfekt leitende Oberfläche $\Gamma = \partial\Omega$ trifft. Das anliegende Feld ist Lösung der homogenen Maxwell'schen Gleichungen im $\mathbb{R}^3$ und induziert auf Γ einen Oberflächenstrom j und eine Ladungsdichte ρ . Diese wiederum erzeugen elektromagnetische Felder E^{scat}, B^{scat} in Ω und $\Omega' := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. Da das gesamte Feld $E^{tot} = E^{inc} + E^{scat}$, $B^{tot} = B^{inc} + B^{scat}$ aufgrund von Linearität den Maxwell'schen Gleichungen in Ω sowie Ω' genügt, und Γ als perfekt leitend angenommen wurde, also E auf Γ identisch Null ist, muß die tangentielle Komponente des Gesamtfeldes verschwinden. Das heißt aber

$$n \times E^{inc} = -n \times E^{scat} \quad \text{auf } \Gamma.$$

Insgesamt sind also Lösungen des Außenraumproblems

$$\begin{aligned}\operatorname{div} E &= \operatorname{div} B = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} B + \operatorname{curl} E &= 0, \\ -\frac{\partial}{\partial t} E + \operatorname{curl} B &= 0 \quad \text{in } \Omega' \times \mathbb{R}_{>0}, \\ n \times E &= -n \times E^{inc} \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega, \\ E = B &= 0 \quad \text{in } \Omega' \times \mathbb{R}_{\leq 0},\end{aligned}\tag{1.11}$$

und des korrespondierenden Innenraumproblems

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} E &= \operatorname{div} B = 0, \\
\frac{\partial}{\partial t} B + \operatorname{curl} E &= 0, \\
-\frac{\partial}{\partial t} E + \operatorname{curl} B &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times \mathbb{R}_{>0}, \\
n \times E &= -n \times E^{inc} \quad \text{auf} \quad \Gamma = \partial\Omega, \\
E = B &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times \mathbb{R}_{\leq 0},
\end{aligned} \tag{1.12}$$

gesucht.

Lemma 1.7.1. Sind E, B Lösungen der homogenen Maxwellschen Gleichungen, d.h. $j = \rho = 0$ in Ω, Ω' , so genügen der Oberflächenstrom j und die -ladungsdichte ρ auf Γ , gegeben durch

$$j = -[n \cdot E]_{\Gamma} \quad \text{bzw.} \quad \rho = -[n \times B]_{\Gamma},$$

der Ladungserhaltungsgleichung

$$\operatorname{div}_{\Gamma} j + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0.$$

Dabei ist $\operatorname{div}_{\Gamma} j := n \cdot \operatorname{curl}(n \times \tilde{j})$, für eine glatte Fortsetzung von j auf eine offene Umgebung von Γ , die Oberflächendivergenz von j .

Beweis. Es sei $\omega \subset \mathbb{R}^3$ so, daß ω durch Γ in zwei Teilgebiete $\omega_1 \subset \Omega$ und $\omega_2 \subset \Omega'$ zerlegt wird. Weiter sei $S = \Gamma \cap \omega$ und $L = \partial S$ der geschlossene Pfad, der S begrenzt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_S \operatorname{div}_{\Gamma} j \, ds &= - \int_S n \cdot \operatorname{curl}(n \times [n \times B]) \, ds \\
&= - \int_S n \cdot \operatorname{curl} n \times n \times B_1 \, ds + \int_S n \cdot \operatorname{curl} n \times n \times B_2 \, ds \\
&= - \int_L n \times n \times B_1 \cdot dl + \int_L n \times n \times B_2 \cdot dl.
\end{aligned}$$

Da auf Γ gilt $B = -n \times n \times B + (n \cdot B)n$ und da $n \cdot dl = 0$ ist, folgt mit (1.5)

$$\begin{aligned}
\int_S \operatorname{div}_{\Gamma} j_{\Gamma} \, ds &= \int_L B_1 \cdot dl + \int_L B_2 \cdot dl \\
&= \frac{d}{dt} \int_S E_1 \cdot n \, ds + \frac{d}{dt} \int_S E_2 \cdot n \, ds \\
&= \frac{d}{dt} \int_S [E \cdot n]_{\Gamma} \, ds \\
&= - \frac{d}{dt} \int_S \rho \, ds.
\end{aligned}$$

Da ω beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 1.7.1. Für eine offene Oberfläche Γ wird verlangt, daß der Oberflächenstrom entlang des Randes $\partial\Gamma$ fließt, d.h. $j \cdot (n \times t) = 0$, wobei t der zum Rand von Γ tangentielle Vektor ist. Es gilt dann

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \rho \, ds = \int_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} j \, ds = \int_{\Gamma} n \cdot \operatorname{curl}(n \times j_{\Gamma}) \, ds = \int_{\partial\Gamma} (n \times j) \cdot dl = \int_{\partial\Gamma} j \cdot (n \times t) \, du = 0,$$

d.h. die Gesamtladung auf Γ ist zeitlich unverändert.

Bemerkung 1.7.2 (Ausstrahlungsbedingungen für die Maxwellschen Gleichungen).

Für ein elektromagnetisches Feld E, B als Lösung des Modellproblems, werden zusätzlich die *Ausstrahlungsbedingungen*

$$\begin{aligned} \left(B \times \frac{x}{|x|} \right) - E &= o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty \\ \left(E \times \frac{x}{|x|} \right) + B &= o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

gestellt. Dabei gilt: Ist eine der Bedingungen erfüllt, so auch die andere.

1.8 Potentialdarstellung elektromagnetischer Felder

Satz 1.8.1. Es sei $u \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$. Dann gilt:

1. Ist $\operatorname{curl} u = 0$, so existiert genau ein $p \in H^1(\mathbb{R}^3)$ so, daß $u = \nabla p$.
2. Ist $\operatorname{div} u = 0$, so existiert genau ein $v \in H^1(\mathbb{R}^3)^3$ mit $\operatorname{div} v = 0$ so, daß $u = \operatorname{curl} v$.

Beweis. Eine mehrfache Anwendung der Formel der partiellen Integration zeigt, daß

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\operatorname{curl} \psi|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} (\operatorname{div} \psi)^2 dx \quad (1.13)$$

für Funktionen $\psi \in W_0^1(\mathbb{R}^3)^3 := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)^3; (1 + |x|^2)^{\frac{|\alpha|-1}{2}} \partial^\alpha \psi \in L^2(\mathbb{R}^3)^3, 0 \leq |\alpha| \leq 1\}$. Damit definiert die Abbildung

$$A : W_0^1 \times W_0^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\psi, \eta) \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{curl} \psi \operatorname{curl} \eta dx + \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div} \psi \operatorname{div} \eta dx \quad (1.14)$$

eine elliptische Bilinearform und es existiert eine eindeutige Lösung des Variationsproblems

$$A(\psi, \eta) = \int_{\mathbb{R}^3} u \eta dx \quad (\eta \in W_0^1(\mathbb{R}^3)^3).$$

Die Lösung ψ erfüllt insbesondere $-\Delta \psi = u$.

Es gelte $\operatorname{div} u = 0$. Dann ist $-\Delta \operatorname{div} \psi = 0$ und da $\operatorname{div} \psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$, folgt $\operatorname{div} \psi = 0$ in $\mathbb{R}^3$. Die Funktion $v := \operatorname{curl} \psi$ erfüllt dann wegen (1.14) die Beziehung $u = \operatorname{curl} v$. Ferner gilt $\operatorname{curl} v \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$ und $\operatorname{div} \psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$, mit (1.13) also $v \in H^1(\mathbb{R}^3)^3$.

Es gelte $\operatorname{curl} u = 0$. Dann ist $-\Delta \operatorname{curl} \psi = 0$ und da $\operatorname{curl} \psi \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$, folgt $\operatorname{curl} \psi = 0$ in $\mathbb{R}^3$. Die Funktion $p := \operatorname{div} \psi$ erfüllt dann wegen (1.14) die Beziehung $u = \nabla p$. Ferner gilt $p = \operatorname{div} \psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und $\nabla p = u \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$ also $p \in H^1(\mathbb{R}^3)$. $\square$

Die Formulierung der Probleme (1.11) und (1.12) zusammen mit den Stetigkeitseigenschaften elektromagnetischer Felder gestattet es nun, Lösungen in Form von Potentialen zu schreiben.

Satz 1.8.2. Es sei $\{E, B\}$, $E, B \in C^1(\mathbb{R}_{>0}; L^2(\mathbb{R}^3)^3)$, Lösung von (1.11), (1.12). Dann existieren $A \in C^1(\mathbb{R}_{>0}; H^1(\mathbb{R}^3)^3)$ und $\phi \in C^1(\mathbb{R}_{>0}; H^1(\mathbb{R}^3))$ so, daß

$$B = \operatorname{curl} A \quad \text{und} \quad E = -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial}{\partial t} A.$$

A und ϕ können so gewählt werden, daß sie die *Lorentz*-Eichung

$$\operatorname{div} A + \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0$$

erfüllen und Lösungen homogener Wellengleichungen in Ω und Ω' mit Null-Anfangsbedingung und den Sprungbedingungen

$$\left[\frac{\partial}{\partial n} A \right]_{\Gamma} = -[n \times B]_{\Gamma} \quad \text{und} \quad \left[\frac{\partial}{\partial n} \phi \right]_{\Gamma} = -[E \cdot n]_{\Gamma}$$

sind.

Beweis. Es gilt für alle $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ unter der Verwendung der Tatsache, daß die Normalenkomponente des magnetischen Feldes stetig ist,

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div} B, \psi \rangle &= \int_{\Omega} B \operatorname{grad} \psi \, dx + \int_{\Omega'} B \operatorname{grad} \psi \, dx \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div} B \psi \, dx + \int_{\Omega'} \operatorname{div} B \psi \, dx + \int_{\Gamma} [B \cdot n] \psi \, ds \\ &= 0, \end{aligned}$$

also $\operatorname{div} B = 0$ im distributionellen Sinne und somit existiert ein Vektorfeld $A_0 \in C^1(\mathbb{R}_{>0}, H^1(\mathbb{R}^3)^3)$, so daß $B = \operatorname{curl} A_0$. Dabei folgt die stetige Differenzierbarkeit in der Zeit aus der stetigen Differenzierbarkeit in der Zeit von B . Mit der Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes folgt

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{curl} \left(E + \frac{\partial}{\partial t} A_0 \right), \psi \rangle &= \int_{\Omega} \left(E + \frac{\partial}{\partial t} A_0 \right) \operatorname{curl} \psi \, dx + \int_{\Omega'} \left(E + \frac{\partial}{\partial t} A_0 \right) \operatorname{curl} \psi \, dx \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{curl} \left(E + \frac{\partial}{\partial t} A_0 \right) \psi \, dx + \int_{\Omega'} \operatorname{curl} \left(E + \frac{\partial}{\partial t} A_0 \right) \psi \, dx \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left[\left(E + \frac{\partial}{\partial t} A_0 \right) \times n \right] \psi \, ds \\ &= 0, \end{aligned}$$

also $\operatorname{curl} \left(E + \frac{\partial}{\partial t} A_0 \right) = 0$ und somit existiert eine Funktion $\phi_0 \in C^1(H^1(\mathbb{R}^3))$ derart, daß $E + \frac{\partial}{\partial t} A_0 = \operatorname{grad} \phi_0$. Für eine Funktion $\psi \in H^1(\mathbb{R}^3)$ kann B dargestellt werden durch den curl von $A := A_0 - \operatorname{grad} \psi$. Die Darstellung für E muß dann abgeändert werden zu $E = \operatorname{grad} \left(\phi_0 + \frac{\partial}{\partial t} \psi \right) - \frac{\partial}{\partial t} A_0$. Für gewählte Funktionen A_0 und ϕ_0 sei ψ Lösung der Wellengleichung

$$\Delta \psi - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \operatorname{div} A_0 + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \phi_0.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A + \mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \operatorname{div} A_0 - \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi + \mu \epsilon \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \\ &= \operatorname{div} A_0 + \mu \epsilon \frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \left(\Delta \psi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und es folgt formal in $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$

$$0 = \operatorname{div} E = \operatorname{div} \left(-\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial A}{\partial t} \right) = -\Delta \phi + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2},$$

sowie mit $\text{curl curl} = \text{grad div} - \Delta$

$$\begin{aligned}
0 &= \text{curl } B - \mu\epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \\
&= \text{curl curl } A + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \phi + \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} A \\
&= \text{grad div } A - \Delta A + \mu\epsilon \text{grad } \frac{\partial}{\partial t} \phi + \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} A \\
&= \text{grad} \left(\text{div } A + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \phi \right) - \Delta A + \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} A \\
&= -\Delta A + \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} A.
\end{aligned}$$

Da $\partial_t A \in C(H^1(\mathbb{R}^3)^3)$ gilt $\left[\frac{\partial A}{\partial t} \cdot n\right]_\Gamma = 0$ und somit ist

$$[\text{grad } \phi \cdot n] = \left[\left(-E - \frac{\partial A}{\partial t} \right) \cdot n \right]_\Gamma = -[E \cdot n].$$

Zum Nachweis der Sprungeigenschaft der Normalenableitung von A über Γ sei e_1, e_2, e_3 eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ und π_n bzw. π_t bezeichne die Projektion auf die Normalenkomponente bzw. auf den Tangentialraum am Punkt $x \in \Gamma$. Die Divergenz von A kann auf Γ geschrieben werden als Distribution in $H^{-1/2}(\Gamma)$ (siehe [LiDa], Vol. 3 S. 210)

$$\text{div } A = \text{div}_\Gamma(\pi_t A) + 2H(n \cdot A) + \frac{\partial}{\partial n}(n \cdot A).$$

Dabei beschreibt H die Krümmung der Oberfläche. Es folgt also

$$\text{div}_\Gamma[\pi_t A]_\Gamma + 2H[n \cdot A] + \left[\frac{\partial}{\partial n}(n \cdot A) \right]_\Gamma = - \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_\Gamma \quad \text{in } H^{-1/2}(\Gamma).$$

Hier bezeichnet π_t die Projektion auf die Tangentialebene und im weiteren sei zusätzlich π_n die Projektion auf die Normalenkomponente. Da offensichtlich $[A]_\Gamma = 0$, somit $[A \cdot n]_\Gamma = 0$, $[\pi_t A]_\Gamma = 0$ und $\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_\Gamma = 0$ folgt

$$\left[\frac{\partial}{\partial n}(n \cdot A) \right]_\Gamma = 0.$$

Da $B = \text{curl } A$ und da die Normalenkomponente des magnetischen Feldes stetig ist, folgt

$$[\text{curl } A \cdot n] = 0,$$

d.h., der Sprung tangentialer Ableitungen von A verschwindet. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\left[n \cdot \frac{\partial A}{\partial x_1} \right]_\Gamma &= \left[A \cdot \frac{\partial n}{\partial x_1} \right]_\Gamma + \left[\left(\frac{\partial A}{\partial x_1} \right) \cdot n \right]_\Gamma \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (A \cdot n) \right]_\Gamma \\
&= [e_1 \cdot \text{grad}(A \cdot n)]_\Gamma \\
&= [(\pi_n(e_1) + \pi_t(e_1)) \cdot \text{grad}(A \cdot n)]_\Gamma \\
&= [n_1 n \cdot \text{grad}(A \cdot n)]_\Gamma + [\pi(e_1) \cdot \text{grad}(A \cdot n)]_\Gamma \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Für die erste Komponente von $[B \times n]_\Gamma$ erhält man also

$$\begin{aligned}
 [B \times n]_{\Gamma,1} &= [\operatorname{curl} A \times n]_{\Gamma,1} \\
 &= + \sum_{j=1}^3 n_j \left[\frac{\partial A_1}{\partial x_j} \right]_\Gamma - \sum_{j=1}^3 n_j \left[\frac{\partial A_j}{\partial x_1} \right]_\Gamma \\
 &= n \cdot [\operatorname{grad} A_1]_\Gamma - n \cdot \left[\frac{\partial A_1}{\partial x_j} \right]_\Gamma \\
 &= \left[\frac{\partial A_1}{\partial n} \right]_\Gamma.
 \end{aligned}$$

Analoge Rechnungen für die anderen Komponenten von $[B \times n]_\Gamma$ zeigen dann die Behauptung $\left[\frac{\partial}{\partial n} A \right]_\Gamma = [B \times n]_\Gamma$. □



Kapitel 2

Analyse der retardierten Potentialintegralgleichung

In Abschnitt 1.8 wurde eine Darstellung des elektromagnetischen Feldes mit Hilfe von Potentialen bewiesen. Diese stellten sich als Lösungen homogener Wellengleichungen heraus. Eine temporäre Fourier–Laplace-Transformation überführt diese Gleichungen in eine durch die Laplace-Variable ω parametrisierte Familie von Helmholtz–Gleichungen. Entscheidender Aspekt der ersten Abschnitte dieses Kapitels sind Normabschätzungen, die sich mittels der Parsevalschen Formel auf den zeitabhängigen Fall übertragen lassen. Dazu ist besonders die Abhängigkeit der Lösung vom komplexen Parameter ω zu analysieren. Schließlich wird eine Variationsformulierung für die Bestimmung einer Ladungsdichte zu einem bekannten Potential im zeitabhängigen Fall gegeben, die eine a priori Fehleranalyse und eine Stabilitätsaussage zur retardierten Potentialintegralgleichung ermöglicht. Es wird der Vorgehensweise von Bamberger und Duong in [BaDuo] gefolgt.

2.1 Die Helmholtz–Gleichung mit komplexem Parameter

Für ein beschränktes Lipschitz–Gebiet Ω mit einem zweimal stetig differenzierbarem Rand $\Gamma := \partial\Omega$, eine Funktion $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ und eine komplexe Zahl ω mit $\text{Im } \omega > 0$ ist eine Funktion u gesucht so, daß u die folgenden Gleichungen im schwachen Sinne löst

$$(P_{\Omega'}^\omega) \quad \begin{cases} (\Delta + \omega^2)u = 0 & \text{in } \Omega' := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\ u = g & \text{auf } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

und

$$(P_\Omega^\omega) \quad \begin{cases} (\Delta + \omega^2)u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \Gamma \end{cases}$$

Von der Lösung u wird ferner verlangt, daß sie die *Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung* erfüllt,

$$\frac{x}{|x|} \cdot \text{grad } u(x) - i\omega u(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (2.1)$$

uniform für alle Richtungen $x/|x|$.

Definition 2.1.1 (Schwache Lösung). Eine Funktion $u \in H^1(\Omega) \cap H^1(\Omega')$ heißt *schwache Lösung* von (P_Ω^ω) und $(P_{\Omega'}^\omega)$, falls $u = g$ auf Γ und für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ und alle $w \in H^1(\Omega')$

gilt

$$\int_{\Omega} (-\operatorname{grad} u \operatorname{grad} \bar{v} + \omega^2 u \bar{v}) \, dx = 0 \quad \text{und} \quad (2.2)$$

$$\int_{\Omega'} (-\operatorname{grad} u \operatorname{grad} \bar{w} + \omega^2 u \bar{w}) \, dx = 0. \quad (2.3)$$

Bemerkung 2.1.1. Die Ausstrahlungsbedingung wurde hier durch die Forderung $u \in H^1(\Omega')$ ersetzt. Dies wird später genauer begründet.

Bemerkung 2.1.2. Im folgenden wird nur die Existenz schwacher Lösungen analysiert, daher wird auch der Begriff 'Lösung' statt 'schwacher Lösung' benutzt.

2.1.1 Existenz und Eindeutigkeit

Satz 2.1.1 (Fortsetzungslemma). Es sei $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$ und $\omega \in \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > \sigma_0\}$ für ein $\sigma_0 \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann existiert ein $v \in H^1(\Omega)$ und ein $v' \in H^1(\Omega')$ so, daß $v|_{\Gamma} = v'|_{\Gamma} = \psi$ und

$$\int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + |\omega v|^2) \, dx \leq C_{\Gamma} \max\left(\frac{1}{\sigma_0}, 1\right) |\omega| \|\psi\|_{1/2, \Gamma}^2$$

sowie

$$\int_{\Omega'} (|\nabla v'|^2 + |\omega v'|^2) \, dx \leq C_{\Gamma} \max\left(\frac{1}{\sigma_0}, 1\right) |\omega| \|\psi\|_{1/2, \Gamma}^2,$$

mit einer Konstanten C_{Γ} , die nur von Γ abhängt.

Beweis. Es sei $(\mathcal{O}_j, \Phi_j)_{1 \leq j \leq J}$ ein Atlas von Γ . Durch Übergang zu einer dem Atlas untergeordneten Teilung der Eins kann o.B.d.A. angenommen werden, daß $\operatorname{supp} \psi \subset \Gamma \cap \mathcal{O}_1$. Ferner kann angenommen werden, daß $U := \Phi_1(\mathcal{O}_1) \subset \{x \in \mathbb{R}^3; |x_3| < 1, |(x_1, x_2)| < 1\}$ und $\mathcal{O} := \Phi_1(\mathcal{O}_1 \cap \Gamma) \subset \{x \in \mathbb{R}^3; x_3 = 0, |(x_1, x_2)| < 1\}$. Mit $\tilde{\psi} := \psi \circ \Phi_1^{-1}$ gilt $\operatorname{supp} \tilde{\psi} \subset \mathcal{O}$ und die Norm von ψ in $H^{1/2}(\Gamma)$ ist äquivalent zur Norm von $\tilde{\psi}$ in $H^{1/2}(\mathbb{R}^2)$. Weiter gilt für eine Funktion $v \in H^1(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} v \subset \mathcal{O}_1$ und $\tilde{v} := v \circ \Phi_1^{-1}$ sowie der Bezeichnung $\mathbb{R}_+^3 := \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$

$$\int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + |\omega v|^2) \, dx = \int_{\mathbb{R}_+^3 \cap U} (|J\Phi_1^{-1} \cdot \nabla \tilde{v}|^2 + |\omega \tilde{v}|^2) |J\Phi_1| \, dy,$$

wobei die Determinante der Jacobi-Matrix, $|J\Phi_1|$, beschränkt ist, also

$$\int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + |\omega v|^2) \, dx \leq C \int_{\mathbb{R}_+^3 \cap U} (|\nabla \tilde{v}|^2 + |\omega \tilde{v}|^2) \, dy.$$

Es kann das folgende Problem betrachtet werden.

Finde $W \in H^1(\mathbb{R}_+^3)$ so, daß

$$(HP) \quad \begin{cases} (-\Delta + |\omega|^2)W = 0 \\ W|_{\mathbb{R}^2 \times \{0\}} = \tilde{\psi}. \end{cases}$$

Ist W Lösung von (HP) , so ist die in den Variablen $y' = (y_1, y_2)$ partiell Fouriertransformierte $\hat{W}$ von W Lösung von

$$(HP) \quad \begin{cases} \left(|\xi'|^2 + |\omega|^2 - \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \hat{W}(\xi', y_3) = 0 \\ \hat{W}(\xi', 0) = \hat{\psi}(\xi') \end{cases}$$

und gegeben durch

$$\hat{W}(\xi', y_3) = \hat{\psi}(\xi') e^{-y_3 \sqrt{|\xi'|^2 + |\omega|^2}}, \quad y_3 > 0, \xi' \in \mathbb{R}^2.$$

Mit

$$\int_0^\infty e^{-2y_3 \sqrt{|\xi'|^2 + |\omega|^2}} dy_3 = \frac{1}{2\sqrt{|\xi'|^2 + |\omega|^2}}$$

und den Eigenschaften der Fourier-Transformation folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^3} (|\nabla W|^2 + |\omega W|^2) dy &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty (|\nabla W|^2 + |\omega W|^2) dy_3 dy' \\ &= (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty \left(|\xi'|^2 |\hat{W}|^2 + \left| \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \hat{W} \right|^2 + |\omega \hat{W}|^2 \right) dy_3 d\xi' \\ &= (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty \left(|\xi'|^2 |\hat{W}|^2 + (|\xi'|^2 + |\omega|^2) |\hat{W}|^2 + |\omega \hat{W}|^2 \right) dy_3 d\xi' \\ &= (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty 2 (|\xi'|^2 + |\omega|^2) |\hat{W}|^2 dy_3 d\xi' \\ &= (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty 2 (|\xi'|^2 + |\omega|^2) |\hat{\psi}|^2 e^{-2y_3 \sqrt{|\xi'|^2 + |\omega|^2}} dy_3 d\xi' \\ &= (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} 2 (|\xi'|^2 + |\omega|^2) |\hat{\psi}|^2 \int_0^\infty e^{-2y_3 \sqrt{|\xi'|^2 + |\omega|^2}} dy_3 d\xi' \\ &= (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} (|\xi'|^2 + |\omega|^2)^{1/2} |\hat{\psi}|^2 d\xi'. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt mit $\omega = \eta + i\sigma$

$$|\xi'|^2 + |\omega|^2 = |\xi'|^2 + \eta^2 + \sigma^2 \leq \max\left(\frac{1}{\sigma_0^2}, 1\right) (\eta^2 + \sigma^2) (1 + |\xi'|^2),$$

falls $\sigma \geq \sigma_0$, also

$$(2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} (|\xi'|^2 + |\omega|^2) |\hat{\psi}|^2 d\xi' \leq \max\left(\frac{1}{\sigma_0^2}, 1\right)^{1/2} (2\pi)^2 |\omega| \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi'|^2)^{1/2} |\hat{\psi}|^2 d\xi'.$$

Da $(2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi'|^2)^{1/2} |\hat{\psi}|^2 d\xi' = \|\psi\|_{1/2, \Gamma}^2$, folgt

$$\int_{\mathbb{R}_+^3} (|\nabla W|^2 + |\omega W|^2) dy \leq \max\left(\frac{1}{\sigma_0}, 1\right) |\omega| \|\psi\|_{1/2, \Gamma}^2.$$

Zum Schluß sei eine Funktion $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0})$ mit $\text{supp } \theta \subset [0, 1[$ und $\theta(0) = 1$ gewählt. Es sei dann $\eta(y) := \theta(|y_3|)$ und $\tilde{v} := \eta W$. Dann ist $v := \tilde{v} \circ \Phi_1 \in H^1(\Omega)$ und erfüllt $v|_\Gamma = \psi$ sowie die

Abschätzung

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + |\omega v|^2) \, dx &\leq C_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}_+^3 \cap U} (|\nabla \tilde{v}|^2 + |\omega \tilde{v}|^2) \, dy \\
&= C_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}_+^3 \cap U} (|\nabla(\eta W)|^2 + |\omega(\eta W)|^2) \, dy \\
&= C_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}_+^3 \cap U} (|(\nabla \eta)W + \eta(\nabla W)|^2 + |\omega(\eta W)|^2) \, dy \\
&\leq C_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}_+^3 \cap U} (|(\nabla \eta)W| + |\eta(\nabla W)|)^2 + |\omega(\eta W)|^2 \, dy \\
&\leq C_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}_+^3 \cap U} (|\eta(\nabla W)|^2 + |\omega(\eta W)|^2) \, dy \\
&\leq C_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}_+^3 \cap U} (|\nabla W|^2 + |\omega W|^2) \, dy \\
&\leq C_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}_+^3} (|\nabla W|^2 + |\omega W|^2) \, dy,
\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. $\square$

Lemma 2.1.1. Die Abbildung

$$u \mapsto \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |\omega u|^2 \, dx \right)^{1/2} \quad (u \in H^1(\Omega))$$

definiert für $\omega \in \mathbb{C}$, $\text{Im } \omega > 0$, eine Norm $\|\cdot\|_{1,\Omega,\omega}$ auf $H^1(\Omega)$. Ferner ist $\|\cdot\|_{1,\Omega,\omega}$ eine zu $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ äquivalente Norm. Die gleiche Aussage gilt, wenn Ω durch Ω' ersetzt wird.

Beweis. Offensichtlich definiert $\|\cdot\|_{1,\Omega,\omega}$ eine Norm auf $H^1(\Omega)$. Für $u \in H^1(\Omega)$ gilt

$$\min(1, |\omega|^2) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{1,\Omega,\omega}^2 \leq \max(1, |\omega|^2) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Im Fall von Ω' folgt die Behauptung analog. $\square$

Zum Nachweis der Existenz schwacher Lösungen wird der Methode der Variationsrechnung gefolgt. Wesentliches Hilfsmittel ist dabei das Lemma von Lax und Milgram.

Satz 2.1.2 (Lax–Milgram Lemma). Es sei V ein komplexer Hilbert–Raum und $a : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige sesquilineare Form auf V und $L : V \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige lineare Abbildung. Dann gilt: Ist a V –elliptisch, d.h. existiert eine Konstante $\alpha > 0$ so, daß

$$\text{Re } a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad (v \in V),$$

so hat das Problem

$$\begin{cases} \text{Finde } u \in V \text{ so, daß} \\ a(u, v) = L(v) \quad \text{für alle } v \in V. \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung $u \in V$.

Beweis. Siehe [LiDa]. □

Satz 2.1.3. Das Problem (P_Ω^ω) hat für alle $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\text{Im } \omega > 0$ eine eindeutige Lösung $u \in H^1(\Omega)$. Die Lösung erfüllt

$$\|u\|_{1,\Omega,\omega}^2 \leq C \frac{1}{\sigma^2} \max\left(\frac{1}{\sigma_0}, 1\right) |\omega|^3 \|g\|_{1/2,\Gamma}^2, \quad (2.4)$$

falls $\text{Im } \omega \geq \sigma_0 > 0$. Wiederum gilt die gleiche Aussage für Ω' .

Beweis. Es wird der direkten Methode der Variationsrechnung gefolgt. Die Abbildung $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(v_1, v_2) \mapsto \int_{\Omega} (-\nabla v_1 \nabla \overline{v_2} + \omega^2 v_1 \overline{v_2}) \, dx$$

definiert eine Bilinearform auf $H^1(\Omega)$. Ferner ist a stetig, wie eine Anwendung der Hölderschen Ungleichung in $L^2(\Omega)$ und die Beziehung $(\alpha \overline{\gamma} + \beta \overline{\delta}) \leq \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \sqrt{|\gamma|^2 + |\delta|^2}$ für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ zeigen. Eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ ist genau dann eine Lösung von (P_Ω^ω) falls $u|_\Gamma = g$ und für $v_0 \in H^1(\Omega)$ mit $v_0|_\Gamma = g$ gilt

$$a(u - v_0, v) = -a(v_0, v) \quad (v \in H_0^1(\Omega)).$$

Wegen

$$\begin{aligned} \sigma \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + |\omega v|^2) \, dx &= \int_{\Omega} \sigma |\nabla v|^2 + \sigma |\omega|^2 |v|^2 \, dx \\ &= \text{Im} \left(\int_{\Omega} (\eta - i\sigma) (-\nabla v \cdot \nabla \overline{v}) + (\eta + i\sigma)^2 (n - i\sigma) |v|^2 \, dx \right) \\ &= \text{Im} \left(\overline{\omega} \int_{\Omega} -|\nabla v|^2 + \omega^2 |v|^2 \, dx \right) \\ &= \text{Im} (\overline{\omega} a(v, v)) \\ &\leq |\overline{\omega} a(v, v)| \\ &= |\omega| |a(v, v)| \end{aligned}$$

und $\text{Im} (\overline{\omega} a(v, v)) = \text{Re} (-i \overline{\omega} a(v, v))$ ist a $H^1(\Omega)$ -elliptisch und damit existiert nach dem Lax-Milgram Lemma eine eindeutig bestimmte Funktion $u \in H^1(\Omega)$ so, daß $u|_\Gamma = g$ und $a(u - v_0, v) = -a(v_0, v)$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ und $v_0 \in H^1(\Omega)$, $v_0|_\Gamma = g$. Für die Funktion u gilt $a(u, v) = 0$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$, also $a(u, u) = a(u, u + (v_0 - u)) = a(u, v_0)$ und es folgt mit der Elliptizität von a , der Hölderschen Ungleichung in $L^2(\Omega)$ und in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,\Omega,\omega}^2 &\leq \frac{|\omega|}{\sigma} |a(u, u)| = \frac{|\omega|}{\sigma} |a(u, v_0)| \\ &\leq \frac{|\omega|}{\sigma} \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v_0| + |\omega u| |\omega v_0| \, dx \\ &\leq \frac{|\omega|}{\sigma} (\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\omega u\|_{L^2(\Omega)} \|\omega v_0\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq \frac{|\omega|}{\sigma} \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\omega u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\omega v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ &= \frac{|\omega|}{\sigma} \|u\|_{1,\Omega,\omega} \|v_0\|_{1,\Omega,\omega}. \end{aligned}$$

Teilen durch $\|u\|_{1,\Omega,\omega}$ ergibt $\|u\|_{1,\Omega,\omega} \leq \frac{|\omega|}{\sigma} \|v_0\|_{1,\Omega,\omega}$. Ist v_0 gemäß dem Fortsetzungslemma gewählt, so folgt

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,\Omega,\omega} &\leq \frac{|\omega|}{\sigma} \|v_0\|_{1,\Omega,\omega} \\ &\leq \frac{C_\Gamma}{\sigma} \max\left(\frac{1}{\sigma_0^{1/2}}, 1\right) |\omega|^{3/2} \|g\|_{1/2,\Gamma}. \end{aligned}$$

Die Aussage für Ω' folgt ähnlich. □

Bemerkung 2.1.3. Die Forderung $\text{Im } \omega > 0$ ist hier entscheidend, denn zum einen werden Uneindeutigkeiten durch (reelle) Eigenwerte des Laplace-Operators vermieden, zum anderen ist eine Abschätzung der Form (2.4) für reelle Parameter ω nicht möglich. Für $\omega = 0$ würde dann nämlich $u \equiv 0$ folgen, was aber für $g \not\equiv 0$ nicht der Fall sein kann.

2.2 Operatoren bezogen auf die Helmholtz-Gleichung

2.2.1 Der Dirichlet-Neumann Operator N_ω

Für die eindeutige Lösung $u \in H^1(\Omega) \cap H^1(\Omega')$ von (P_Ω^ω) und $(P_{\Omega'}^\omega)$ zu gegebenem $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ sei

$$N_\omega g := \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_\Gamma \quad (2.5)$$

der Sprung der Normalenableitung von u über Γ , der definiert ist durch

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_\Gamma := \left(\frac{\partial u_i}{\partial n} - \frac{\partial u_e}{\partial n} \right).$$

Dabei ist $\frac{\partial u_i}{\partial n}$ die Normalenableitung (im schwachen Sinne, vergl Satz 2.2.2) der Lösung in Ω , während u_e für die Lösung in Ω' steht und $\frac{\partial u_e}{\partial n}$ die Normalenableitung von u_e bezüglich der äußeren Normalen von Ω ist. Wesentliche Hilfsmittel zum Nachweis der Eigenschaften von N_ω sind ein Spursatz sowie die verallgemeinerten Greenschen Formeln.

Satz 2.2.1 (Spursatz). Die Abbildung $T : C^\infty(\overline{\Omega}) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$, $\phi \mapsto \phi|_\Gamma$ läßt sich zu einer stetigen linearen Abbildung auf $H^1(\Omega)$ fortsetzen. Eine ähnliche Aussage ist gültig für Ω' .

Beweis. Siehe [A], [Cos]. □

Satz 2.2.2 (Verallgemeinerte erste Greensche Formel). Die auf $C^\infty(\overline{\Omega})$ definierte Abbildung $\gamma_n : v \rightarrow v \cdot n$ kann zu einem stetigen linearen Operator auf $H(\text{div}, \Omega)$ in $H^{-1/2}(\Gamma)$ fortgesetzt werden derart, daß für $v \in H(\text{div}, \Omega)$ gilt

$$\int_\Omega v \cdot \nabla \bar{\phi} \, dx + \int_\Omega \text{div } v \, \bar{\phi} \, dx = \langle v \cdot n, \phi \rangle_\Gamma \quad (\phi \in H^1(\Omega)).$$

Dabei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ die natürliche Dualität zwischen den Räumen $H^{-1/2}(\Gamma)$ und $H^{1/2}(\Gamma)$.

Beweis. Siehe [GiRa]. □

Korollar 2.2.1. Es sei $u \in H^1(\Omega)$ so, daß $\Delta u \in L^2(\Omega)$ gilt. Dann ist $\frac{\partial u}{\partial n} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ und es gilt

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} dx = \int_{\Omega} \Delta u \bar{v} dx + \langle \frac{\partial u}{\partial n}, v \rangle_{\Gamma} \quad (v \in H^1(\Omega)). \quad (2.6)$$

Satz 2.2.3. Für $\text{Im } \omega > 0$ definiert N_{ω} einen Isomorphismus von $H^{1/2}(\Gamma)$ nach $H^{-1/2}(\Gamma)$. Die Operatornorm von N_{ω} ist beschränkt durch

$$\|N_{\omega}\| \leq C_{\Gamma} \frac{1}{\sigma_0} \max\left(\frac{1}{\sigma_0}, 1\right) |\omega|^2, \quad (2.7)$$

falls $\text{Im } \omega \geq \sigma_0 > 0$. Ferner wird durch N_{ω} eine $H^{1/2}(\Gamma)$ -elliptische Bilinearform definiert. Genauer gilt

$$\text{Re } \langle N_{\omega} g, -i\omega g \rangle_{\Gamma} \geq C_{\Gamma} \sigma_0 \min(\sigma_0^2, 1) \|g\|_{1/2, \Gamma}^2 \quad (g \in H^{1/2}(\Gamma)), \quad (2.8)$$

falls $\text{Im } \omega \geq \sigma_0 > 0$.

Beweis. Es sei $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ und u die Lösung von (P_{Ω}^{ω}) und $(P_{\Omega'}^{\omega})$. Falls $u \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ und $u \in C^1(\Omega') \cap C(\bar{\Omega}')$ so gilt nach der zweiten Greenschen Formel (2.6)

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial n} \bar{v} ds = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla \bar{v} - \omega^2 u \bar{v}) dx \quad (v \in H^1(\Omega)), \quad \text{bzw.} \quad (2.9)$$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_e}{\partial n} \bar{w} ds = - \int_{\Omega'} (\nabla u \nabla \bar{w} - \omega^2 u \bar{w}) dx \quad (w \in H_{comp}^1(\Omega')). \quad (2.10)$$

Für den allgemeinen Fall $u \in H^1(\Omega) \cap H^1(\Omega')$ wird $\frac{\partial u}{\partial n}$ als Distribution in $H^{-1/2}(\Gamma)$ mit Hilfe der rechten Seite von (2.9), die im übrigen gleich $-a(u, v)$ ist, definiert. Mit den Stetigkeits-Abschätzungen für a aus dem vorigen Abschnitt folgt

$$\left| \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial n} \bar{v} ds \right| \leq \|u\|_{1, \Omega, \omega} \|v\|_{1, \Omega, \omega} \quad (v \in H^1(\Omega)),$$

bzw.

$$\left| \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_e}{\partial n} \bar{w} ds \right| \leq \|u\|_{1, \Omega', \omega} \|w\|_{1, \Omega', \omega} \quad (w \in H^1(\Omega')).$$

Mit dem Fortsetzungslemma angewandt auf $v|_{\Gamma}$ bzw. $w|_{\Gamma}$ und der Abschätzung von u durch g aus Satz 2.1.3 läßt sich sowohl die Norm von $\frac{\partial u_i}{\partial n}$ als auch die von $\frac{\partial u_e}{\partial n}$ in $H^{-1/2}(\Gamma)$ abschätzen durch

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_{i/e}}{\partial n} \right\|_{-1/2, \Gamma} &\leq C \max\left(\frac{1}{\sigma_0^{1/2}}, 1\right) |\omega|^{1/2} \|u\|_{1, \Omega/\Omega', \omega} \\ &\leq C \frac{1}{\sigma_0} \max\left(\frac{1}{\sigma_0}, 1\right) |\omega|^2 \|g\|_{1/2, \Gamma}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

sofern $\text{Im } \omega \geq \sigma_0$. Addieren der Gleichungen (2.9) und (2.10) sowie eine Anwendung der Dreiecksungleichung zeigen schließlich

$$\|N_{\omega} u\|_{-1/2, \Gamma} \leq 2C_{\Gamma} \frac{1}{\sigma_0} \max\left(\frac{1}{\sigma_0}, 1\right) |\omega|^2 \|g\|_{1/2, \Gamma}.$$

Es sei jetzt $v := -i\omega u$ und $\omega = \eta + i\sigma$, $\sigma \geq \sigma_0 > 0$. Dann folgt mit der Greenschen Formel und $v|_\Gamma = -i\omega g$

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial u_i}{\partial n}, -i\omega g \rangle_\Gamma &= \int_\Omega (\nabla u \nabla \bar{v} - \omega^2 u \bar{v}) \, dx \\
&= i\bar{\omega} \int_\Omega (\nabla u \nabla \bar{u} - \omega^2 u \bar{u}) \, dx \\
&= i \int_\Omega (\bar{\omega} |\nabla u|^2 - \omega |\omega u|^2) \, dx \\
&= \int_\Omega ((i\eta + \sigma) |\nabla u|^2 - (-i\eta - \sigma) |\omega u|^2) \, dx,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \langle \frac{\partial u_i}{\partial n}, -i\omega g \rangle_\Gamma &= \sigma \int_\Omega |\nabla u|^2 + |\omega u|^2 \, dx \\
&\geq \sigma_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 + \sigma_0^2 |u|^2 \, dx \\
&\geq \sigma_0 \min(\sigma_0^2, 1) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \\
&\geq C \sigma_0 \min(\sigma_0^2, 1) \|g\|_{1/2}^2,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus dem Spursatz folgt. Die gleiche Abschätzung läßt sich für $\frac{\partial u_e}{\partial n}$ herleiten und Addieren der beiden Ungleichungen gibt die behauptete Elliptizitätsaussage.

Die Elliptizität der zu N_ω gehörenden Bilinearform impliziert die Injektivität von N_ω . Zum Nachweis der Surjektivität sei $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Dann definiert ϕ aber ein stetiges lineares Funktional auf $H^1(\Omega)$ und somit existiert aufgrund der Elliptizität von a nach dem Lemma von Lax–Milgram ein $u \in H^1(\Omega) \cap H^1(\Omega')$ derart, daß

$$\langle \phi, v \rangle_\Gamma = \int_{\Omega \cup \Omega'} \nabla u \nabla \bar{v} - \omega^2 u \bar{v} \, dx \quad (v \in H^1(\Omega) \cap H^1(\Omega')).$$

Mit den Greenschen Formeln ist dann aber $N_\omega(u|_\Gamma) = \phi$. Mit dem Satz vom inversen Operator folgt die Behauptung. $\square$

2.2.2 Fundamentallösung der Helmholtz–Gleichung und Darstellungsformel

Es sei $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} \omega > 0$. Um eine Lösung der Gleichung

$$(\Delta + \omega^2)u = \delta_0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \quad (2.12)$$

zu finden, wird die partielle Differentialgleichung zunächst als rotationssymmetrisches Problem außerhalb des Ursprungs betrachtet, d.h. gesucht ist eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}_{>0})$ derart, daß

$$\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial}{\partial R} R^2 \frac{\partial f}{\partial R} \right) + \omega^2 f = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}_{>0}.$$

Die Funktion $g := Rf$ erfüllt dann

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \omega^2 \right) g = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2}{\partial R^2} g = -\omega^2 g,$$

also $g = ce^{\pm i\omega R}$ und somit $f = \frac{c}{R}e^{\pm i\omega R}$. Da die Funktion f für das negative Vorzeichen im Exponenten exponentiell wächst, insbesondere also die Ausstrahlungsbedingung nicht erfüllen kann, für das positive Vorzeichen jedoch rasch fällt, sei das positive gewählt. Es ist dann nur noch eine Konstante c zu bestimmen, so daß (2.12) gilt.

Satz 2.2.4. Die lokal integrierbare Funktion $E : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \frac{-1}{4\pi|x|}e^{i\omega|x|}$ ist eine Fundamentallösung des Differentialoperators $\Delta + \omega^2$.

Beweis. Es sei $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ mit $\text{supp } \phi \subset B_k(0)$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann ist, da E singulär im Ursprung ist, der folgende Grenzwert zu betrachten.

$$\begin{aligned} ((\Delta + \omega^2)E, \phi) &= (E, (\Delta + \omega^2)\phi) = \int E(\Delta + \omega^2)\phi \, dx \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\int_{r < |x| < k} E(x)(\Delta + \omega^2)\phi(x) \, dx \right) =: \lim_{r \rightarrow 0} J_r. \end{aligned}$$

Dabei gilt für $r < k$

$$\begin{aligned} J_r &= \int_{r < |x| < k} (\Delta + \omega^2)E(x)\phi(x) \, dx + \int_{|x|=r} E(x) \frac{\partial \phi}{\partial n}(x) - \phi(x) \frac{\partial E}{\partial n}(x) \, ds_x \\ &= \int_{|x|=r} E(x) \frac{\partial \phi}{\partial n}(x) - \phi(x) \frac{\partial E}{\partial n}(x) \, ds_x, \end{aligned}$$

wobei das Volumenintegral verschwindet, da $(\Delta + \omega^2)E \equiv 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ während im Oberflächenintegral zu beachten ist, daß der Normalenvektor zum Ursprung zeigt. In Polarkoordinaten gilt $\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial \phi}{\partial R}$, $\frac{\partial E}{\partial n} = -\frac{\partial E}{\partial R}$ und $\frac{\partial E}{\partial R} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{i\omega}{R} \right) e^{i\omega R}$. Damit folgt

$$J_r = \int_{|x|=r} \phi(x) \frac{\partial E}{\partial r}(x) - E(x) \frac{\partial \phi}{\partial r}(x) \, ds_x \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi} \int_{|x|=r} \frac{1}{r^2} e^{i\omega r} \phi(x) - \frac{i\omega}{r} e^{i\omega r} \phi(x) + \frac{e^{i\omega r}}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}(x) \, ds_x \\ &= \frac{r^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{r^2} e^{i\omega r} \phi(x) - \frac{i\omega}{r} e^{i\omega r} \phi(x) + \frac{e^{i\omega r}}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}(x) \cos u \, du \, dv, \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\omega r} \phi(x) - ri\omega e^{i\omega r} \phi(x) + re^{i\omega r} \frac{\partial \phi}{\partial r}(x) \cos u \, du \, dv, \end{aligned} \quad (2.14)$$

wobei $x \equiv r \cdot (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$. Es sei nun $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig gewählt. Aufgrund der stetigen Differenzierbarkeit von ϕ existiert eine Konstante $C > 0$ so, daß $|\phi(0) - \phi(x)| < C|x|$ und $|\text{grad } \phi(x)| < C$ für alle $x \in \overline{B_\epsilon(0)}$. Für $r \leq \epsilon$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\omega r} \phi(x) \cos u \, du \, dv - \phi(0) \right| &\leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\sigma \epsilon} |\phi(0) - \phi(x)| \cos u \, du \, dv \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\sigma r} C \epsilon \cos u \, du \, dv \\ &= C e^{-\sigma \epsilon} \epsilon. \end{aligned}$$

Für die zwei verbleibenden Summanden in (2.14) gilt

$$\left| \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r i \omega e^{i\omega r} \phi(x) \cos u \, du \, dv \right| \leq C' \epsilon e^{-\sigma \epsilon}$$

und

$$\left| \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r \omega e^{i\omega r} \frac{\partial \phi}{\partial r}(x) \cos u \, du \, dv \right| \leq C \epsilon e^{-\sigma \epsilon}.$$

Insgesamt ist damit gezeigt, daß $J_r \rightarrow \phi(0)$ für $r \rightarrow 0$. $\square$

Lemma 2.2.1. Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ eine Lösung der Helmholtzgleichung mit $\text{Im } \omega > 0$, die außerdem die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung (2.1) erfüllt. Dann gilt für fixiertes $x \in \mathbb{R}^3$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) - \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) E(x-y) \right) ds_y = 0. \quad (2.15)$$

Beweis. Es wird zunächst gezeigt, daß es eine Konstante $C > 0$ gibt, derart daß

$$\int_{|y|=R} |u|^2 ds_y \leq C, \quad R \rightarrow \infty. \quad (2.16)$$

Zunächst folgt aus der Ausstrahlungsbedingung, daß

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial n} - i\omega u \right|^2 ds_y \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + |\omega|^2 |u|^2 + 2\text{Im} \left(\omega u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) \right) ds_y \end{aligned} \quad (2.17)$$

wobei wiederum n den äußeren Normalenvektor bezeichne. Es sei R so groß gewählt, daß $\bar{\Omega} \subset B_R(0)$. Eine Anwendung der Greenschen Formel auf das Gebiet $B_R \setminus \bar{\Omega}$ ergibt dann

$$\omega \int_{|y|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds_y = \omega \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds_y - \bar{\omega} |\omega|^2 \int_{B_R \setminus \bar{\Omega}} |u|^2 dy + \omega \int_{B_R \setminus \bar{\Omega}} |\text{grad } u|^2 dy.$$

Das zweifache des Imaginärteils dieser Gleichung kann nun in (2.17) eingesetzt werden. Dies impliziert die Identität

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{|y|=R} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + |\omega|^2 |u|^2 \right) ds_y + 2\text{Im}(\omega) \int_{B_R \setminus \bar{\Omega}} (|\omega|^2 |u|^2 + |\text{grad } u|^2) dy \right) \\ = -2\text{Im} \left(\omega \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds_y \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Da alle vier Terme auf der linken Seite des Gleichheitszeichens positiv sind, und die Summe aller vier endlich ist, muß auch jeder einzeln gegen einen endlichen Wert konvergieren. Damit ist (2.16) gezeigt. In der offensichtlichen Identität

$$\begin{aligned} \int_{|y|=R} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) - \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) E(x-y) \right) ds_y &= \int_{|y|=R} u(y) \left(\frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) - i\omega E(x-y) \right) ds_y \\ &\quad - \int_{|y|=R} E(x-y) \left(\frac{\partial u}{\partial n_y}(y) - i\omega u(y) \right) ds_y \\ &=: I_1 + I_2 \end{aligned}$$

kann die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung auf I_1 und I_2 angewendet werden. Da

$$\frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) = -\frac{(x-y) \cdot n}{4\pi|x-y|^2} \left(\frac{1}{|x-y|} - i\omega \right) e^{i\omega|x-y|}$$

folgt, da für große y gilt $|(x-y) \cdot n/|x-y| - 1| \leq 1/|x-y|$, daß es eine Konstante C gibt mit

$$\left| \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) - i\omega E(x-y) \right| \leq \frac{C}{R^2} \quad (|y| = R),$$

und damit gilt für I_1

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \left(\int_{|y|=R} |u|^2 ds_y \right)^{1/2} \left(\int_{|y|=R} \left| \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) - i\omega E(x-y) \right|^2 ds_y \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{C'}{R}. \end{aligned}$$

Mit $|E(x-y)| \leq \frac{C}{R}$ für große R und der Ausstrahlungsbedingung für u folgt

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \left(\int_{|y|=R} |E|^2 ds_y \right)^{1/2} \left(\int_{|y|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) - i\omega u(y) \right|^2 ds_y \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{C''}{R}. \end{aligned}$$

Insgesamt also

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) - \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) E(x-y) \right) ds_y = 0.$$

□

Bemerkung 2.2.1. Aus der Gleichung (2.18) folgt insbesondere, daß für Lösungen $u \in H_{lok}^1(\Omega')$ der Helmholtzgleichung mit $\text{Im } \omega > 0$ eine Konstante $C > 0$ existiert, so daß

$$\int_{B_R \setminus \bar{\Omega}} (|\omega|^2 |u|^2 + |\text{grad } u|^2) dy \leq C \quad (R \in \mathbb{N}).$$

Das heißt aber $u \in H^1(\Omega')$. Diese Beobachtung rechtfertigt insbesondere, daß die schwache Lösung des Problems $(P_{\Omega'}^\omega)$ im Raum $H^1(\Omega')$ gesucht wurde.

Satz 2.2.5 (Darstellungsformel). Für eine Lösung $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{D}(\bar{\Omega}') \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ von $(\Delta + \omega^2)u = 0$ mit $\text{Im } \omega > 0$, die die Ausstrahlungsbedingung erfüllt, gilt

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} [\nabla u(y) \cdot n]_{\Gamma} ds_y - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} \right) [u(y)]_{\Gamma} ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma. \quad (2.19)$$

Ist Γ zusätzlich zweimal stetig differenzierbar, so gilt außerdem

$$\frac{u_e(x) + u_i(x)}{2} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} [\nabla u(y) \cdot n]_{\Gamma} ds_y - \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} \right) [u(y)]_{\Gamma} ds_y, \quad x \in \Gamma,$$

wobei das letzte Integral als Cauchy–Hauptwert existiert.

Beweis. Es sei $x \in \Omega$ und $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ so gewählt, daß $B_\epsilon := B(x, \epsilon) \subset \Omega$. Ferner sei $k \in \mathbb{N}$ so, daß $\overline{\Omega} \subset B_k$. Da $E(x) = \frac{-1}{4\pi|x|} e^{i\omega|x|}$ Fundamentallösung von $\Delta + \omega^2$ ist, also $(\Delta + \omega^2)E = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, gilt unter Benutzung der Greenschen Formel

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \frac{\partial u_i}{\partial n_y}(y) E(x-y) ds_y &= \int_{\Gamma} u_i(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) ds_y \\
&\quad + \int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial u_i}{\partial n_y}(y) E(x-y) ds_y - \int_{\partial B_\epsilon} u_i(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) ds_y \\
&= \int_{\Omega \setminus B_\epsilon} (\Delta u(y) + \omega^2 u(y)) E(x-y) dy \\
&\quad - \int_{\Omega \setminus B_\epsilon} (\Delta E(x-y) + \omega^2 E(x-y)) u(y) dy \\
&= 0
\end{aligned}$$

und wie im Beweis zu Satz 2.2.4 gezeigt, konvergiert das Randintegral über ∂B_ϵ gegen $u(x)$, d.h.

$$u(x) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u_i}{\partial n_y}(y) E(x-y) ds_y + \int_{\Gamma} u_i(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) ds_y. \quad (2.20)$$

Eine Anwendung der Greenschen Formel auf das Gebiet $\Omega' \cap B_k$ ergibt

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \frac{\partial u_e}{\partial n_y}(y) E(x-y) ds_y &= \int_{\Gamma} u_e(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) ds_y \\
&\quad + \int_{\partial B_k} \frac{\partial u_e}{\partial n_y}(y) E(x-y) ds_y - \int_{\partial B_k} u_e(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) ds_y \\
&= \int_{\Omega' \cap B_k} (\Delta u(y) + \omega^2 u(y)) E(x-y) dy \\
&\quad - \int_{\Omega' \cap B_k} (\Delta E(x-y) + \omega^2 E(x-y)) u(y) dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Ausstrahlungsbedingung verschwindet das Randintegral über ∂B_k für $k \rightarrow \infty$, d.h.

$$0 = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u_e}{\partial n_y}(y) E(x-y) ds_y + \int_{\Gamma} u_e(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) ds_y. \quad (2.21)$$

Addieren der Gleichungen (2.20) und (2.21) führt für $x \in \Omega$ auf die Darstellungsformel. Im Fall $x \in \Omega'$ führen dieselben Argumente auf die Gleichung.

Für $z \in \Omega$ hat der obige Teil bereits gezeigt, daß

$$u(z) = \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(z-y) - E(z-y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) ds_y.$$

Es sei nun $x \in \Gamma$ fixiert und der Grenzwert $z \rightarrow x$, $z \in \Omega$, betrachtet. Dazu sei N eine offene Umgebung von x , so daß gilt

$$\begin{aligned}
u(z) &= \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(z-y) - E(z-y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) ds_y \\
&= \int_{\Gamma \setminus N} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(z-y) ds_y + \int_{\Gamma \cap N} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(z-y) ds_y \\
&\quad - \int_{\Gamma \setminus N} E(z-y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) ds_y - \int_{\Gamma \cap N} E(z-y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) ds_y. \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Der erste und der dritte Term ist jeweils stetig in $z = x$. Zur Analyse des zweiten und vierten Terms sei ein Koordinatensystem so gewählt, daß $x = 0$ und die Normale zu $\partial\Omega$ bei 0 gleich $(0, 0, 1)$ ist. Weiter sei N so klein, daß $\partial\Omega \cap N$ dargestellt werden kann in der Form $y_3 = \phi(y')$, wobei $y' = (y_1, y_2)$, mit einer Funktion $\phi \in C^2$ und $\phi(0, 0) = \text{grad } \phi(0, 0) = 0$ insbesondere also $\phi = O(|y'|^2)$. Die Normale und das Oberflächenmaß auf $\partial\Omega \cap N$ sind dann gegeben durch

$$n_y = (-\text{grad } \phi, 1)/\sqrt{1 + |\text{grad } \phi|^2}, \quad ds_y = \sqrt{1 + |\text{grad } \phi|^2} dy'.$$

Weiter kann N so gewählt werden, daß $\partial\Omega \cap N = \{(y', \phi(y')), |y'| < \epsilon\}$. Aufgrund der Stetigkeit aller Integranden für $z \neq 0$, genügt es, den Grenzwert $(0, 0, z_3) \rightarrow 0$ zu betrachten. Für den vierten Term auf der rechten Seite von (2.22) folgt für

$$E(z - y) = \frac{-1}{4\pi \sqrt{|y'|^2 + |\phi(y') - z_3|^2}} e^{i\omega \sqrt{|y'|^2 + |\phi(y') - z_3|^2}},$$

daß das Integral

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega \cap N} \frac{-1}{4\pi \sqrt{|y'|^2 + |\phi(y') - z_3|^2}} e^{i\omega \sqrt{|y'|^2 + |\phi(y') - z_3|^2}} \text{grad } u(y) \cdot n \, ds_y \\ &= \int_{\{|y'| < \epsilon\}} \frac{-1}{4\pi \sqrt{|y'|^2 + |\phi(y') - z_3|^2}} e^{i\omega \sqrt{|y'|^2 + |\phi(y') - z_3|^2}} \text{grad } u(y) \cdot (-\text{grad } \phi, 1) \, dy' \end{aligned}$$

existiert und mit ϵ verschwindet. Dies ist leicht einzusehen, wenn man beachtet, daß

$$\int_{\{|y'| < \epsilon\}} \frac{1}{|y'|} dy' = 2\pi\epsilon.$$

Mit

$$\begin{aligned} \text{grad}_y E(z - y) &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{-(z - y)}{|z - y|^3} + \frac{z - y}{|z - y|^2} \right) e^{i\omega |z - y|} \\ &= \frac{-(z - y)}{4\pi |z - y|^3} (1 - |z - y|) e^{i\omega |z - y|} \end{aligned}$$

nimmt der zweite Term in (2.22) die folgende Form an.

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega \cap N} \frac{\partial}{\partial n_y} E(z - y) u(y) \, ds_y = \int_{\partial\Omega \cap N} \frac{-(z - y) \cdot n_y}{4\pi |z - y|^3} (1 - |z - y|) e^{i\omega |z - y|} u(y) \, ds_y \\ &= \int_{\{|y'| < \epsilon\}} \frac{-y' \cdot \text{grad } \phi(y') + \phi(y') - z_3}{4\pi (\sqrt{|y'|^2 + |\phi(y') - z_3|^2})^3} (1 - \sqrt{|y'|^2 + |\phi(y') - z_3|^2}) e^{i\omega \sqrt{|y'|^2 + |\phi(y') - z_3|^2}} u(y', \phi(y')) \, dy'. \end{aligned}$$

Dabei ist $-y' \cdot \text{grad } \phi(y') = O(|y'|^2)$ und für kleine z_3 , d.h. $|z_3| \sim |y'|$, ist $1 - \sqrt{|y'|^2 + |\phi(y') - z_3|^2} = 1 + O(|y'|)$ sowie $e^{i\omega \sqrt{|y'|^2 + |\phi(y') - z_3|^2}} = 1 + O(|y'|)$, so daß als einziger kritischer Term das Integral

$$-z_3 \int_{\{|y'| < \epsilon\}} \frac{1}{4\pi (\sqrt{|y'|^2 + |\phi(y') - z_3|^2})^3} u(y', \phi(y')) \, dy'$$

zu untersuchen bleibt. Hierbei ist

$$\frac{1}{(\sqrt{|y'|^2 + |\phi(y') - z_3|^2})^3} = \frac{1}{(\sqrt{|y'|^2 + z_3^2})^3} (1 + O(|z_3|) + O(|y'|^2)),$$

wie sich leicht nachprüfen läßt, wenn man den Mittelwertsatz auf die Abbildung

$$g : a \mapsto (|y'|^2 + |a - z_3|^2)^{-3/2}$$

anwendet. Somit ist der einzige Term der zu einer Unstetigkeit bei $z = 0$ führt

$$-z_3 \int_{\{|y'| < \epsilon\}} \frac{1}{4\pi(\sqrt{|y'|^2 + z_3^2})^3} u(y', \phi(y')) dy'.$$

Von nun an sei $z_3 < 0$ angenommen. Die Substitution $y' = -z_3 v$ überführt das letzte Integral in

$$\begin{aligned} \int_{\{|v| < -\epsilon/z_3\}} \frac{z_3^3}{4\pi z_3^3(\sqrt{|v|^2 + 1})^3} u(-z_3 v, \phi(-z_3 v)) dv \\ = \int_0^{-\epsilon/z_3} \frac{r}{4\pi(\sqrt{r^2 + 1})^3} \int_0^{2\pi} u(-z_3 r(\cos \theta, \sin \theta, \phi(-z_3 r(\cos \theta, \sin \theta))) d\theta dr \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $C > 0$ so, daß $|u(x) - u(0)| \leq C|x|$, für $|x| \leq \epsilon$, gilt

$$\left| \int_0^{2\pi} u(-z_3 r(\cos \theta, \sin \theta, \phi(-z_3 r(\cos \theta, \sin \theta))) d\theta - 2\pi u(0) \right| \leq C\epsilon,$$

da $|-z_3 r| \leq \epsilon$ für $r \in (0, -\epsilon/z_3)$. Wegen

$$\int_0^\infty \frac{r}{(r^2 + 1)^{3/2}} dr = \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + 1}} \right]_0^\infty = 1.$$

folgt im Grenzübergang $z_3 \rightarrow 0-$

$$\int_0^{-\epsilon/z_3} \frac{r}{4\pi(\sqrt{r^2 + 1})^3} \int_0^{2\pi} u(-z_3 r(\cos \theta, \sin \theta, \phi(-z_3 r(\cos \theta, \sin \theta))) d\theta dr = \frac{u(0)}{2}.$$

Insgesamt wurde also bewiesen, daß

$$\lim_{z \rightarrow x, z \in \Omega} \int_\Gamma u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(z - y) ds_y = \int_\Gamma u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x - y) ds_y + \frac{u(x)}{2}$$

Analoge Rechnungen führen auf die Aussage für $z \rightarrow x$, $z \in \Omega'$. Zur Existenz des Cauchy-Hauptwertes in der Darstellungsformel sei auf die Literatur zur Darstellungsformel des Laplace-Operators verwiesen (z.B. [Kre]), mit der Identität

$$\frac{-e^{i\omega|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{-1}{4\pi|x-y|} - \frac{e^{i\omega|x-y|} - 1}{4\pi|x-y|}$$

lassen sich nämlich die dortigen Aussagen übertragen. Addieren der Gleichungen gibt dann die behauptete Beziehung

$$\frac{u_e(x) + u_i(x)}{2} = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} E(x - y) [u(y)]_\Gamma ds_y - \int_\Gamma E(x - y) \left[\frac{\partial u}{\partial n_y}(y) \right]_\Gamma ds_y.$$

□

Korollar 2.2.2. Für eine glatte Lösung u von (P_Ω^ω) und $(P_{\Omega'}^\omega)$ sei $\phi := [\frac{\partial u}{\partial n}]_\Gamma$ der Sprung der Normalenableitung von u über den zweimal stetig differenzierbaren Rand Γ . Dann gilt

$$g(x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\phi(y)}{|x-y|} e^{i\omega|x-y|} ds_y, \quad x \in \Gamma \quad (2.23)$$

und

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\phi(y)}{|x-y|} e^{i\omega|x-y|} ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma. \quad (2.24)$$

Beweis. Dies folgt sofort aus dem vorigen Satz unter Berücksichtigung von $u_i|_\Gamma = u_e|_\Gamma = g$. □

Bemerkung 2.2.2. Da für $\omega = \eta + i\sigma$ gilt $e^{i\omega|x-y|} = e^{i\eta|x-y|} e^{-\sigma|x-y|}$ folgt für $\sigma > 0$, daß die mittels (2.24) definierte Funktion in $H^1(\Omega')$ liegt.

2.2.3 Der Neumann–Dirichlet Operator S_ω

Gemäß der Darstellungsformel (2.23) wird der Neumann–Dirichlet Operator S_ω definiert vermöge

$$S_\omega \phi(x) := \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\phi(y)}{|x-y|} e^{i\omega|x-y|} ds_y \quad (\phi \in L^\infty(\Gamma)). \quad (2.25)$$

Im folgenden Satz wird die naheliegende Vermutung bewiesen, daß S_ω der inverse Operator des Dirichlet–Neumann Operators N_ω ist.

Satz 2.2.6. Für $\text{Im } \omega > 0$ läßt sich S_ω zum inversen Operator von N_ω fortsetzen. S_ω ist assoziiert zu einer Bilinearform, die die Elliptizitätsungleichung

$$\text{Re } \langle \phi, -i\omega S_\omega \phi \rangle_\Gamma \geq C \min(\sigma_0, 1) \frac{\|\phi\|_{-1/2, \Gamma}^2}{|\omega|} \quad (\phi \in H^{-1/2}(\Gamma))$$

erfüllt. Die Operatornorm von S_ω ist beschränkt durch

$$\|S_\omega\| \leq C|\omega| \frac{1}{\sigma_0} \max\left(\frac{1}{\sigma_0^2}, 1\right),$$

falls $\text{Im } \omega > \sigma_0 > 0$.

Beweis. Für einen C^2 –Rand Γ und eine auf Γ stetige Funktion g läßt sich für die Lösung u der Probleme $(P_\Omega^\omega), (P_{\Omega'}^\omega)$ die Regularitätsaussage $u \in C(\mathbb{R}^3)$, $u|_\Omega \in C^1(\Omega)$ und $u|_{\Omega'} \in C^1(\Omega')$ zeigen (vergl. Standardliteratur elliptischer Randwertprobleme). Gemäß Definition ist dann $N_\omega g = [\frac{\partial u}{\partial n}]_\Gamma$. Mit der Darstellungsformel folgt

$$g(x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_\Gamma ds_y = S_\omega \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_\Gamma (x).$$

Aufgrund der Dichtigkeit stetiger Funktionen in $H^{1/2}(\Gamma)$ folgt $S_\omega N^\omega = Id$ auf $H^{1/2}(\Gamma)$. Da N^ω einen Isomorphismus definiert, folgt dann auch $N^\omega S_\omega = Id$ auf $H^{-1/2}(\Gamma)$. Zur Abschätzung von $\|S_\omega\|$ sei $\phi = N_\omega g = [\frac{\partial u}{\partial n}]_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$ für die Lösung u von $(P_\Omega^\omega), (P_{\Omega'}^\omega)$ mit $u|_\Gamma = g \in H^{1/2}(\Gamma)$. Dann folgt unter Anwendung der Greenschen Formeln

$$\begin{aligned} \text{Re } \langle \phi, -i\omega S_\omega \phi \rangle_\Gamma &= \sigma \int_{\Omega \cup \Omega'} |\nabla u|^2 + |\omega u|^2 dx \\ &\geq \sigma_0 \min(\sigma_0^2, 1) \left(\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u\|_{H^1(\Omega')}^2 \right) \\ &\geq C \sigma_0 \min(\sigma_0^2, 1) \|g\|_{1/2, \Gamma}^2, \end{aligned} \quad (2.26)$$

wobei die letzte Ungleichung aus dem Spursatz folgt. Andererseits gilt

$$\text{Re } \langle \phi, -i\omega S_\omega \phi \rangle_\Gamma \leq |\omega| \|g\|_{1/2, \Gamma} \|\phi\|_{-1/2, \Gamma},$$

also

$$\|S_\omega \phi\|_{1/2, \Gamma} = \|g\|_{1/2, \Gamma} \leq C|\omega| \frac{1}{\sigma_0} \max\left(\frac{1}{\sigma_0^2}, 1\right) \|\phi\|_{-1/2, \Gamma}.$$

Zum Nachweis der Elliptizität sei $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ beliebig gewählt. Dann folgt mit (2.26) und (2.11)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle \phi, -i\omega S_\omega \phi \rangle_\Gamma &= \sigma \int_{\Omega \cup \Omega'} |\nabla u|^2 + |\omega u|^2 dx \\ &\geq \sigma_0 \int_{\Omega \cup \Omega'} |\nabla u|^2 + |\omega u|^2 dx \\ &\geq C \min(\sigma_0, 1) \frac{1}{|\omega|} \|\phi\|_{-1/2, \Gamma}^2. \end{aligned}$$

□

Zur Lösung der Probleme (P_Ω^ω) und $(P_{\Omega'}^\omega)$ kann nun eine Galerkin-Methode zur Bestimmung der unbekannten Dichte $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ aus der Gleichung $S_\omega \phi = g$ betrachtet werden. Ist ϕ bekannt, so ergibt sich die Lösung u aus der Formel (2.24).

2.3 Die Fourier–Laplace Transformation

2.3.1 Fundamentale Aussagen

Definition 2.3.1. Für eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$, ist die *Fourier–Laplace Transformierte* von f , bezeichnet durch Lf , auf $\mathbb{C}$ definiert durch

$$Lf(\eta + i\sigma) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta t} (e^{-\sigma t} f(t)) dt \quad (\omega = \eta + i\sigma \in \mathbb{C}). \quad (2.27)$$

Allgemeiner kann die Fourier–Laplace Transformation für Distributionen $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) := \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}); \operatorname{supp} T \subset [0, \infty)\}$ für die ein σ existiert so, daß die Distribution $e^{-\sigma \cdot} T$ temperiert ist, mittels der Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ wie folgt definiert werden :

$$LT(\omega) := \overline{\mathcal{F}}(e^{-\sigma \cdot} T)(\eta). \quad (2.28)$$

Bemerkung 2.3.1. Die Fourier–Laplace-Transformation ist injektiv. Der linksinverse Operator ist gegeben durch

$$L^{-1}h = \overline{\mathcal{F}}^{-1}(e^{\sigma t} h(\cdot + i\sigma)) = \mathcal{F}(e^{\sigma t} h(\cdot + i\sigma)),$$

falls $h = LT$ für eine geeignete Distribution T .

Bemerkung 2.3.2. Die Variable in der Fourier–Laplace-Transformation wurde hier modifiziert. Die Vorteile dieser Änderung werden später ersichtlich werden, wenn die Normabschätzungen aus den vorigen Abschnitten auf den zeitabhängigen Fall übertragen werden.

Bemerkung 2.3.3. Es sei f eine stetige Funktion mit $f(t) = 0$ für $t < 0$. Wenn $e^{-\sigma_0 t} f(t)$ temperiert ist, dann ist die Funktion $e^{-\sigma t} f(t)$, für $\sigma > \sigma_0$ nicht nur temperiert, sondern fällt für große t schneller als $e^{-\epsilon t}$ für ein $\epsilon > 0$. Für solche σ existiert das Integral

$$Lf(\eta + i\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma t} e^{i\eta t} f(t) dt$$

und die Differentiation der Funktion Lf darf mit der Integration vertauscht werden. Damit gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} + i \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) Lf(\eta + i\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} (it) e^{-\sigma t} e^{i\eta t} f(t) dt + i \int_{-\infty}^{\infty} (-t) e^{-\sigma t} e^{i\eta t} f(t) dt \\ &= 0, \end{aligned}$$

also ist Lf holomorph in $\{\omega \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} \omega > \sigma_0\}$. Durch Regularisierungen erhält man die gleiche Aussage für Distributionen.

Lemma 2.3.1. Es seien $T \in \mathcal{D}'_+$ und $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ so, daß $e^{-\sigma_0 \cdot} T$ temperiert ist. Dann ist $LT(\eta + i\sigma)$ eine holomorphe Funktion in $\eta + i\sigma$ in der komplexen Halbebene $\{\omega \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} \omega > \sigma_0\}$.

Beweis. Siehe [Wal]. □

Lemma 2.3.2. Es sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Dann existieren eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ und Funktionen $f_j \in C(\mathbb{R})$, $j = 0, \dots, k$ derart, daß

$$T = \sum_{j=0}^k f_j^{(j)}, \quad (2.29)$$

wobei die j -ten Ableitungen $f_j^{(j)}$ im Distributionensinne zu verstehen sind. Ferner existiert ein $M \geq 0$ so, daß

$$|f_j(t)| \leq M(1 + |t|)^M, \quad (j = 0, \dots, k). \quad (2.30)$$

Umgekehrt definiert jede Summe obiger Form (2.29) eine temperierte Distribution sofern die Funktionen f_j stetig sind und einer Abschätzung der Form (2.30) genügen.

Beweis. Siehe [Sc]. □

Dieses Lemma gestattet es, die Fourier–Laplace Transformation sehr genau zu charakterisieren. Der folgende Satz ist eine Version des Satzes von Paley–Schwartz–Wiener.

Satz 2.3.1. Es sei h eine holomorphe Funktion im Halbraum $\{\omega \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} \omega > \sigma_0\}$. Dann sind die folgenden Bedingungen gleichwertig:

1. Es existieren eine Distribution $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ und ein $\sigma'_0 \in \mathbb{R}$ so, daß $e^{-\sigma'_0 \cdot} T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ und $LT = h$;
2. Es existieren ein $\sigma_1 \in \mathbb{R}$, $\sigma_0 \leq \sigma_1 < \infty$, eine Konstante C und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, so daß für alle $\omega \in \{\operatorname{Im} \omega > \sigma_1\}$ gilt

$$|h(\omega)| \leq C(1 + |\omega|)^k. \quad (2.31)$$

Beweis. (1) $\implies$ (2). Es sei $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ und $\sigma'_0 \in \mathbb{R}$ so, daß $e^{-\sigma'_0 \cdot} T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Dann existieren nach Lemma 2.3.2 eine natürliche Zahl k und stetige Funktionen f_j , $j = 0, \dots, k$, $\operatorname{supp} f_j \subset [0, \infty[$ mit

$$e^{-\sigma'_0 \cdot} T = \sum_{j=0}^k f_j^{(j)}$$

und es gilt für ein $M \geq 0$

$$|f_j(t)| \leq M(1 + |t|)^M.$$

Es sei $\sigma_1 > \sup(\sigma_0, \sigma'_0)$ und wähle $\sigma \geq \sigma_1$. Dann gilt mit $g_j(t) = e^{-(\sigma - \sigma'_0)t} f_j(t)$

$$e^{-\sigma \cdot T} = \sum_{j=0}^k \left(\frac{d}{dt} + (\sigma - \sigma'_0) \right)^j g_j.$$

Mit $\epsilon = \sigma - \sigma'_0 > 0$ und den Abschätzungen für die Funktionen f_j folgt

$$\begin{aligned} |g_j(t)| &= e^{-(\sigma - \sigma'_0)t} |f_j(t)| \\ &\leq e^{-\epsilon t} M(1 + |t|)^M. \end{aligned}$$

Damit sind, wie sich direkt verifizieren läßt, die Fouriertransformierten $\hat{g}_j$ der Funktionen g_j beschränkte, unendlich oft differenzierbare Funktionen und somit ist

$$h(\omega) = LT(\omega) = \mathcal{F}(e^{-\sigma \cdot T})(\omega) = \sum_{j=0}^k (i\eta + (\sigma - \sigma'_0))^j \hat{g}_j(\eta),$$

woraus die Abschätzung

$$\begin{aligned} |h(\omega)| &\leq C \sum_{j=0}^k (|\omega| + |\sigma'_0|)^j \\ &\leq C(1 + |\omega|)^k, \end{aligned}$$

also (2.31) folgt.

(2) $\implies$ (1). Es sei o.B.d.A. $\sigma_1 > 0$. Für festes $\sigma > \sigma_1$ betrachte mit $\omega = \sigma + i\tau$, $\tilde{\omega} := \sigma - i\eta$, die Abbildung $w(\omega) = \tilde{\omega}^{-k-2} h(\omega)$. Wegen der Abschätzungen für h und wegen $\sigma > 0$ ist $w(\sigma + i \cdot)$ eine integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}$. Damit läßt sich eine Funktion f folgendermaßen definieren:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\sigma - i\eta)t} w(\eta + i\sigma) d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\sigma} e^{\tilde{\omega}t} w(\omega) d\omega, \end{aligned}$$

mit $\gamma_\sigma = \{\omega \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} \omega = \sigma\}$. Da w für $|\eta| \rightarrow \infty$ verschwindet, folgt mit dem Cauchy-Integral Theorem, daß f unabhängig von $\sigma > \sigma_1$ ist. Aus der Abschätzung (2.31) für h und der Definition von w folgt

$$|f(t)| \leq C_0 e^{\sigma t} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\eta|)^{-2} d\eta$$

mit einer positiven Konstanten C_0 unabhängig von σ . Durch Grenzübergang $\sigma \rightarrow \infty$ folgt $f(t) = 0$ für $t < 0$. Weiter zeigt die Ungleichung, daß für $\sigma' > \sigma_1$ gilt $e^{-\sigma' t} f(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow +\infty$. Setzt man

$$T = \left(\frac{d}{dt} \right)^{k+2} f,$$

so ist offensichtlich $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. Wegen

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\right)^{k+2} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\sigma} \tilde{\omega}^{k+2} e^{\tilde{\omega}t} w(\omega) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\sigma} h(\omega) e^{\tilde{\omega}t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\sigma-i\eta)t} h(\eta + i\sigma) d\eta \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{\sigma t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\eta t} h(\eta + i\sigma) d\eta \\
&= L^{-1} h(t),
\end{aligned}$$

somit $L(T) = h$. □

Bemerkung 2.3.4. Alle Aussagen aus diesem Abschnitt lassen sich analog auf Banach–Raumwertige Distributionen übertragen.

2.3.2 Verallgemeinerte Sobolev–Räume

Definition 2.3.2. Für einen Hilbert–Raum E bezeichne $\mathcal{D}'(E)$ den Raum der E –wertigen Distributionen auf $\mathbb{R}$ und $\mathcal{S}'(E)$ den Raum der temperierten Distributionen auf $\mathbb{R}$ mit Werten in E . $\mathcal{D}'_+(E)$ bezeichne den Teilraum der Distributionen $T \in \mathcal{D}'(E)$ mit $\text{supp } T \subset [0, \infty[$. $\mathcal{L}'(E)$ sei der Raum aller $T \in \mathcal{D}'_+(E)$ für die ein $\sigma_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert derart, daß $e^{-\sigma_0 \cdot} T \in \mathcal{S}'(E)$, d.h. der Raum der Fourier–Laplace transformierbaren Distributionen.

Definition 2.3.3. Es sei E ein Hilbert–Raum. Für $\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$ und $s \in \mathbb{R}$ sei der Operator Λ^s definiert durch

$$\Lambda^s f := L^{-1}((-i\cdot)^s Lf(\cdot))$$

und

$$H_\sigma^s(0, \infty; E) := \{f \in \mathcal{L}'(E); e^{-\sigma \cdot} \Lambda^s f \in L^2(\mathbb{R}, E)\}.$$

Bemerkung 2.3.5. Für $s \geq 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$ ist $H_\sigma^s(0, \infty; E)$ Hilbert–Raum.

Die verallgemeinerten Sobolev–Räume H_σ^s lassen sich folgendermaßen charakterisieren.

Satz 2.3.2. Es seien $\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$, $s \in \mathbb{R}$ und E ein Hilbert–Raum. Dann gilt: Eine Distribution f liegt genau dann in $H_\sigma^s(0, \infty; E)$, wenn Lf holomorph ist in $\{\omega \in \mathbb{C}; \text{Im } \omega > \sigma\}$, einer der Bedingungen aus Satz 2.3.1 genügt und

$$\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} |\omega|^{2s} \|Lf(\omega)\|_E^2 d\omega < \infty$$

gilt.

Beweis. Da die Fourier–Transformation ein isometrischer Isomorphismus auf $L^2(\mathbb{R}; E)$ ist, gilt

$$\begin{aligned}
e^{-\sigma \cdot} \Lambda^s f \in L^2(\mathbb{R}; E) &\Leftrightarrow e^{-\sigma \cdot} L^{-1}((-i\omega)^s Lf(\omega)) \in L^2(\mathbb{R}; E) \\
&\Leftrightarrow e^{-\sigma \cdot} \mathcal{F}(e^{\sigma \cdot} (-i\omega)^s Lf(\omega)) \in L^2(\mathbb{R}; E) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{F}((-i\omega)^s Lf(\omega)) \in L^2(\mathbb{R}; E) \\
&\Leftrightarrow ((-i\cdot)^s Lf(\cdot)) \in L^2(\mathbb{R} + i\sigma; E) \\
&\Leftrightarrow \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s} \|Lf(\omega)\|_E^2 d\omega < \infty.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung des Satzes bewiesen. $\square$

Satz 2.3.3 (Parsevalsche Formel). Für $f, g \in H_\sigma^s(0, \infty; E)$ gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \langle Lf(\omega), Lg(\omega) \rangle_E d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sigma t} \langle f(t), g(t) \rangle_E dt.$$

Beweis. Die Fourier–Transformation ist ein unitärer Operator auf $L^2(\mathbb{R}; E)$. Damit folgt für $f, g \in H_\sigma^s(0, \infty; E)$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma t} \langle f(t), g(t) \rangle_E dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle e^{-\sigma t} f(t), e^{-\sigma t} g(t) \rangle_E dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \overline{\mathcal{F}}(e^{-\sigma t} f)(\eta), \overline{\mathcal{F}}(e^{-\sigma t} g)(\eta) \rangle_E d\eta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} \langle Lf(\omega), Lg(\omega) \rangle_E d\omega.
\end{aligned}$$

Insbesondere existiert nach der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung und dem vorigen Satz das letzte Integral für $\text{Im } \omega > 0$. $\square$

Korollar 2.3.1. Für $f \in H_\sigma^s(0, \infty; E)$ gilt

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sigma t} \|\Lambda^s f(t)\|_E^2 dt \right)^{1/2} = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\eta^2 + \sigma^2)^s \|Lf((\eta + i\sigma))\|_E^2 d\eta \right)^{1/2}$$

und beide Seiten definieren eine Norm $|\cdot|_{\sigma,s,E}$ auf $H_\sigma^s(0, \infty; E)$.

Beweis. Die Aussage ist eine direkte Konsequenz aus den beiden vorigen Sätzen. $\square$

Bemerkung 2.3.6. Für $s = k \in \mathbb{N}$ ist $\Lambda^s f$ die k -te Ableitung von f bezüglich t und

$$H_\sigma^k(0, \infty; E) = \{f \in \mathcal{L}'(E); e^{-\sigma t} f^{(k)}(t) \in L^2(\mathbb{R}, E)\}$$

Bemerkung 2.3.7. Für $E = H^r(\Gamma)$ sei $|\cdot|_{\sigma,s,r} := |\cdot|_{\sigma,s,H^r(\Gamma)}$.

2.4 Variationsformulierung für die retardierte Potentialintegralgleichung

Die Abschätzungen aus den vorigen Abschnitten erlauben es, die Operatoren N_ω und S_ω mittels einer inversen Fourier–Laplace Transformation im zeitabhängigen Fall zu betrachten, d.h. als Ope-

ratoren bezogen auf die Wellengleichung im Außenraum Ω'

$$(P_{\Omega'}) \quad \begin{cases} \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = 0 & \text{in } \Omega' \times \mathbb{R}_{>0}, \\ u(\cdot, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(\cdot, 0) = 0 & \text{in } \Omega', \\ u = g & \text{auf } \Gamma \times \mathbb{R}_{>0} \end{cases}$$

für ein $g \in C(\mathbb{R}_+, H^{1/2}(\Gamma))$, $g(0, \cdot) = 0$, und im Innenraum Ω

$$(P_{\Omega}) \quad \begin{cases} \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_{>0}, \\ u(\cdot, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(\cdot, 0) = 0 & \text{in } \Omega', \\ u = g & \text{auf } \Gamma \times \mathbb{R}_{>0}. \end{cases}$$

Für den zeitabhängigen Fall ist der Operator S definiert durch

$$S\phi(x, t) := \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\phi(y, t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y \quad (t > 0, x \in \Gamma)$$

und wird als *retardierter Potentialoperator* bezeichnet.

Satz 2.4.1. S geht unter der Fourier–Laplace Transformation über in den Operator S_{ω} , d.h. es gilt

$$L(S\phi(x, \cdot))(\omega) = S_{\omega}L\phi(x, \omega).$$

Insbesondere gilt für die Lösung u von (P_{Ω}) und $(P_{\Omega'})$ mit $\phi(\cdot, t) := [\frac{\partial u}{\partial n}(\cdot, t)]_{\Gamma}$

$$g = S\phi.$$

Beweis. Für Funktionen $\phi \in L^1(\mathbb{R}_{>0}; L^{\infty}(\Gamma))$ gilt zunächst für $x, y \in \Gamma$

$$L(\phi(y, \cdot - |x - y|))(\omega) = e^{i\omega|x-y|} L\phi(y, \cdot)(\omega).$$

Mit der Bezeichnung $\tilde{\phi} := L\phi$ ist

$$\begin{aligned} L^{-1}(S_{\omega}\tilde{\phi}(x, \omega))(t) &= \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} e^{-i\omega t} S_{\omega}\tilde{\phi}(x, \omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} \int_{\Gamma} e^{-i\omega t} \frac{\tilde{\phi}(y, \omega) e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} ds_y d\omega. \end{aligned}$$

Das iterierte Integral erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Tonelli, so daß die Integrationsreihenfolge vertauscht werden darf. Damit ist

$$\begin{aligned} L^{-1}(S_{\omega}\tilde{\phi}(x, \omega))(t) &= \int_{\Gamma} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} e^{-i\omega t} e^{i\omega|x-y|} \tilde{\phi}(y, \omega) d\omega \frac{1}{|x-y|} ds_y \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\phi(y, t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y \\ &= S\phi(x, t) \end{aligned}$$

und die erste Aussage des Satzes gezeigt. Die zweite Aussage folgt aus der Relation $S_{\omega}\tilde{\phi} = \tilde{g}$ für die zeitharmonischen Probleme (P_{Ω}^{ω}) und $(P_{\Omega'}^{\omega})$. $\square$

Lemma 2.4.1. Die Abbildung $\omega \mapsto S_\omega, \mathbb{C} \rightarrow L(H^{-1/2}(\Gamma); H^{-1/2}(\Gamma))$, wobei $L(E; F)$ den Raum der stetigen linearen Abbildungen von E in F bezeichnet, ist holomorph.

Beweis. Es sei $\phi \in L^\infty(\Gamma)$, so daß

$$S_\omega \phi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\phi(y) e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} ds_y \quad (x \in \Gamma).$$

Formal ergibt sich $\frac{d}{d\omega} S_\omega \phi(x) = \tilde{S}_\omega \phi := \frac{i}{4\pi} \int_\Gamma \phi(y) e^{i\omega|x-y|} ds_y$. Um zu beweisen, daß dies tatsächlich gilt, ist der folgende Grenzwert zu verifizieren,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\substack{\phi \in H^{-1/2}(\Gamma) \\ \|\phi\|_{-1/2, \Gamma} \neq 0}} \frac{\|(S_{\omega+h} \phi - S_\omega \phi)/h - \tilde{S}_\omega \phi\|_{1/2, \Gamma}}{\|\phi\|_{-1/2, \Gamma}} \rightarrow 0. \quad (2.32)$$

Es sei $h > 0$. Aufgrund der Dichtigkeit regulärer Distributionen in $H^{-1/2}(\Gamma)$, ist es ausreichend, den Fall $\phi \in L^\infty(\Gamma)$ zu untersuchen. Es gilt für $x \in \Gamma$

$$\begin{aligned} |(S_{\omega+h} \phi(x) - S_\omega \phi(x))/h - \tilde{S}_\omega \phi(x)| &= \left| \int_\Gamma \phi(y) e^{i\omega|x-y|} \left(\frac{e^{ih|x-y|} - 1 - ih|x-y|}{h|x-y|} \right) ds_y \right| \\ &\leq \|\phi\|_{-1/2, \Gamma} \|1\|_{1/2, \Gamma} \left\| \frac{e^{i\omega|x-\cdot|}}{h|x-\cdot|} (e^{ih|x-\cdot|} - 1 - ih|x-\cdot|) \right\|_{L^\infty(\Gamma)} \end{aligned}$$

Dabei ist $|(e^{ihs} - 1 - ihs)/(hs)| \leq |hs|$, also

$$|(S_{\omega+h} \phi(x) - S_\omega \phi(x))/h - \tilde{S}_\omega \phi(x)| \leq h \|\phi\|_{-1/2, \Gamma} \|1\|_{1/2, \Gamma} \left\| e^{i\omega|x-\cdot|} |x-\cdot| \right\|_{L^\infty(\Gamma)}$$

Ähnlich wie bei der Analyse von fortgesetzten Normalen, läßt sich nachweisen, daß die Funktion

$$f : \xi \mapsto \|e^{i\omega|\xi-\cdot|} |\xi-\cdot|\|_{L^\infty(\Gamma)}$$

glatt in einer Umgebung des Randes Γ ist, sofern Γ glatt ist, und somit $\|f\|_{1/2, \Gamma}$ existiert. Damit folgt

$$\sup_{\substack{\phi \in L^\infty(\Gamma) \\ \|\phi\|_{-1/2, \Gamma} \neq 0}} \frac{\|(S_{\omega+h} \phi - S_\omega \phi)/h - \tilde{S}_\omega \phi\|_{1/2, \Gamma}}{\|\phi\|_{-1/2, \Gamma}} \leq h \|1\|_{1/2, \Gamma} \|f\|_{1/2, \Gamma}.$$

Als direkte Konsequenz ergibt sich (2.32). Da eine Funktion genau dann holomorph ist, wenn sie einmal komplex differenzierbar ist, folgt die Behauptung. $\square$

Die Analysis der vorigen Abschnitte erlaubt es, einen ersten Existenzbeweis zu formulieren.

Satz 2.4.2. Für $g \in \mathcal{L}'(H^{1/2}(\Gamma))$ haben die Probleme (P_Ω) und $(P_{\Omega'})$ eindeutige Lösungen $u \in \mathcal{L}'(H^1(\Omega))$ bzw. $u \in \mathcal{L}'(H^1(\Omega'))$. Die Lösung ist eindeutig repräsentierbar durch ein retardiertes Potential mit Dichte ϕ , d.h. es existiert ein $\phi \in \mathcal{L}'(H^{-1/2}(\Gamma))$ mit

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\phi(y, t - |x-y|)}{|x-y|} ds_y \quad (x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma). \quad (2.33)$$

Beweis. Das vorige Lemma zeigte, daß die Abbildung $\omega \mapsto S_\omega$ eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ mit Werten im Banach-Raum der linearen stetigen Abbildungen von $H^{-1/2}(\Gamma)$ in den Raum $H^{1/2}(\Gamma)$ ist. Dasselbe gilt für den Operator $N_\omega = S_\omega^{-1}$ im komplexen Halbraum $\{\text{Im } \omega > 0\}$. Für eine in $\{\text{Im } \omega > \sigma_0\}$ holomorphe Funktion g mit Werten in $H^{1/2}(\Gamma)$ ist damit die eindeutig bestimmte Abbildung $h(\omega) := N_\omega g(\omega)$ holomorph in $\{\text{Im } \omega > 0\}$. Die Darstellung der Lösung $w(\cdot, \omega)$ von (P_Ω^ω) und $(P_{\Omega'}^\omega)$ mittels der Darstellungsformel und h zeigt dann, daß auch w holomorph als $H^1(\Omega) \cap H^1(\Omega')$ -wertige Funktion ist. Die Abschätzungen aus Satz 2.1.3 zeigen zusammen mit Satz 2.3.1 ferner, daß Distributionen ϕ und u aus $\mathcal{L}'(H^{-1/2}(\Gamma))$ bzw. aus $\mathcal{L}'(H^1(\Omega) \cap H^1(\Omega'))$ existieren mit $L\phi = h$ und $Lu = w$. Die Distribution u ist dann Lösung von (P_Ω) und $(P_{\Omega'})$ mit Dichte ϕ . Die Eindeutigkeit folgt aus der Injektivität der Fourier-Laplace Transformation. $\square$

Satz 2.4.3. Unter der Voraussetzung

$$g \in H_{\sigma_0}^{3/2}(0, \infty; H^{1/2}(\Gamma))$$

für ein $\sigma_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ hat das Problem $(P_{\Omega'})$ eine eindeutige Lösung $u \in H_{\sigma_0}^0(0, \infty; H^1(\Omega'))$, die der Energieabschätzung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sigma t} E_+(t) dt \leq C \frac{1}{\sigma^2} \max\left(\frac{1}{\sigma}, 1\right) |g|_{\sigma, 3/2, 1/2}^2 \quad (\sigma \geq \sigma_0 > 0),$$

wobei C eine nur von Γ abhängige Konstante ist und

$$E_+(t) = \int_{\Omega'} \left(|\nabla u(x, t)|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 \right) dx.$$

Dasselbe Resultat gilt für (P_Ω) und die Lösungen von $(P_{\Omega'})$ und (P_Ω) sind darstellbar durch ein retardiertes Potential auf Γ . Die Dichte ϕ dieses Potentials, definiert durch $\phi = [\frac{\partial u}{\partial n}]$, erfüllt

$$|\phi|_{\sigma, -1/2, -1/2} \leq \frac{1}{\sigma} \max\left(\frac{1}{\sigma}, 1\right) |g|_{\sigma, 3/2, 1/2} \quad (\sigma \geq \sigma_0 > 0).$$

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit für Distributionen in $\mathcal{L}'(H^{1/2}(\Gamma))$ wurde bereits im obigen Satz skizziert. Die Normabschätzungen aus den vorigen Kapiteln zeigen dann $u \in H_{\sigma_0}^0(0, \infty; H^1(\Omega'))$. Es bleibt noch die Abschätzung der Energie zu verifizieren. Mit $L(\partial_t u) = -i\omega Lu$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma t} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma t} \int_{\Omega'} (|\nabla u(x, t)|^2 + |\partial_t u(x, t)|^2) dx dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} \int_{\Omega'} (|\nabla Lu(x, \omega)|^2 + |\omega Lu(x, \omega)|^2) dx d\omega. \end{aligned}$$

Mit der Abschätzung aus Satz 2.1.3 folgt, wenn dort u durch Lu und g durch Lg ersetzt wird,

$$\int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} \int_{\Omega'} (|\nabla Lu(x, \omega)|^2 + |\omega Lu(x, \omega)|^2) dx d\omega \leq C_\Gamma \frac{1}{\sigma^2} \max\left(\frac{1}{\sigma}, 1\right) |\omega|^3 \|Lg\|_{1/2, \Gamma}^2,$$

also

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma t} E_+(t) e^{-2\sigma t} dt &\leq C_\Gamma \frac{1}{\sigma^2} \max\left(\frac{1}{\sigma}, 1\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^3 \|Lg(\cdot, \omega)\|_{1/2, \Gamma}^2 d\omega \\ &= C_\Gamma \frac{1}{\sigma^2} \max\left(\frac{1}{\sigma}, 1\right) |g|_{\sigma, 3/2, 1/2}^2. \end{aligned}$$

Durch analoge Rechnungen ergeben sich die Abschätzungen für ϕ aus (2.7). $\square$

Einige der Eigenschaften von S_ω übertragen sich auf S mittels der inversen Fourier–Laplace Transformation bzw. mit der Parsevalschen Formel.

Satz 2.4.4. S ist ein stetiger linearer Operator von $H_\sigma^1(0, \infty; H^{-1/2}(\Gamma))$ nach $H_\sigma^0(0, \infty; H^{1/2}(\Gamma))$ mit beschränkter Norm unabhängig von $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, d.h. es existiert eine Konstante $C > 0$ derart, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sigma t} \|S\phi(t)\|_{1/2, \Gamma}^2 dt \leq C \frac{1}{\sigma_0^2} \max\left(\frac{1}{\sigma_0^4}, 1\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sigma t} \|\phi'(t)\|_{1/2, \Gamma}^2 dt.$$

Ist $\phi \in H_\sigma^1(0, \infty; H^{-1/2}(\Gamma))$ so, daß $S\phi \in H_\sigma^1(0, \infty; H^{1/2}(\Gamma))$, so gilt außerdem die folgende Elliptizitätsungleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sigma t} \langle \phi(t), S\phi'(t) \rangle_\Gamma dt \geq C \min(\sigma_0, 1) |\phi|_{\sigma, -1/2, -1/2}^2. \quad (2.34)$$

Beweis. Es sei $\phi \in H_\sigma^1(0, \infty; H^{-1/2}(\Gamma))$. Dann gilt

$$-i\omega S_\omega L\phi(\omega, \cdot) = L\left(\frac{\partial}{\partial t} S\phi\right) = LS\left(\frac{\partial}{\partial t} \phi\right).$$

Mit der Parsevalschen Identität und der Abschätzung für S_ω folgt

$$\begin{aligned} |S\phi|_{\sigma, 0, 1/2}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sigma t} \|S\phi(t)\|_{1/2}^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \|L(S\phi(\omega))\|_{1/2}^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \|S_\omega L\phi(\omega)\|_{1/2}^2 d\omega \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} C|\omega|^2 \frac{1}{\sigma_0^2} \max\left(\frac{1}{\sigma_0^4}, 1\right) \|L\phi(\omega)\|_{-1/2}^2 d\omega \\ &= C \frac{1}{\sigma_0^2} \max\left(\frac{1}{\sigma_0^4}, 1\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \|-i\omega L\phi(\omega)\|_{-1/2}^2 d\omega \\ &= C \frac{1}{\sigma_0^2} \max\left(\frac{1}{\sigma_0^4}, 1\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \|L\phi'(\omega)\|_{-1/2}^2 d\omega \\ &= C \frac{1}{\sigma_0^2} \max\left(\frac{1}{\sigma_0^4}, 1\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sigma t} \|\phi'(t)\|_{-1/2}^2 dt \\ &= C \frac{1}{\sigma_0^2} \max\left(\frac{1}{\sigma_0^4}, 1\right) |\phi'|_{\sigma, 0, -1/2}^2. \end{aligned}$$

Der Nachweis der Elliptizität geschieht analog. Mit der Elliptizitätsaussage für S_ω folgt, wenn vorausgesetzt wird, daß die Lösung des zeitabhängigen Problems reellwertig ist,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sigma t} \langle \phi(t), S\phi'(t) \rangle_\Gamma dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sigma t} \operatorname{Re} \langle \phi(t), S\phi'(t) \rangle_\Gamma dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \operatorname{Re} \langle L\phi(\omega), L(S\phi')(\omega) \rangle_\Gamma d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \operatorname{Re} \langle L\phi(\omega), -i\omega S_\omega L\phi(\omega) \rangle_\Gamma d\omega \\
&\geq C \min(\sigma_0, 1) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{1}{|\omega|} \|L\phi(\omega)\|_{-1/2}^2 d\omega \\
&= C \min(\sigma_0, 1) |\phi|_{\sigma, -1/2, -1/2}^2.
\end{aligned}$$

□

Da S stetig ist, ist $S^{-1}H_\sigma^1(0, \infty; H^{1/2}(\Gamma))$ ein abgeschlossener Teilraum von $H_\sigma^1(0, \infty; H^{-1/2}(\Gamma))$. Die Elliptizität von S erlaubt es ferner, die *retardierte Potentialintegralgleichung* $S\phi = g$ durch das folgende Variationsproblem zu ersetzen.

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Finde } \phi \in H_\sigma^1(0, \infty; H^{-1/2}(\Gamma)), \text{ so daß} \\ b(\psi, \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_\Gamma \psi(x, t) g'(x, t) ds_x dt \\ \text{für alle } \psi \in H_\sigma^1(0, \infty; H^{-1/2}(\Gamma)). \end{cases}$$

Dabei bezeichnet b die Bilinearform

$$b(\psi, \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_\Gamma \int_\Gamma \frac{\psi(x, t) \phi'(y, t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y ds_x \right) dt \quad (2.35)$$

und ϕ', g' die zeitlichen Ableitungen von ϕ bzw. g .

2.5 Diskretisierung des Schemas

2.5.1 Diskretisierung im Ort

Zur Diskretisierung des Schemas wird angenommen, daß sich die Oberfläche $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ als Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Stücke $T \in \mathcal{T}$ darstellen läßt, so daß gilt

1. $\bigcup_{T \in \mathcal{T}} T = \Gamma$;
2. Für $T \neq T'$ gilt entweder $T \cap T' = \emptyset$ oder T und T' haben eine gemeinsame Kante oder einen einzelnen Punkt;
3. Für alle $T \in \mathcal{T}$ ist T das Bild eines Polygons $D \subset \mathbb{R}^2$ unter einem Homöomorphismus χ_T .

Jedes der Polygone D kann mittels einer regulären Triangulierung in Dreiecke $S \in \mathcal{S}$ zerlegt werden. Betrachtet man auf dieser Triangulierung ein C^0 -konformes finites Element und den nodalen

Interpolanten von χ_T^{-1} , so wird eine approximierende Oberfläche Γ_h definiert. Im einfachsten Fall von P_1 -finiten Elementen wird Γ durch dreieckige Facetten diskretisiert, deren Ecken auf Γ liegen. Mittels einer zweiten Wahl von finiten Elementen zur Triangulierung $\mathcal{S}$ kann dann ein endlichdimensionaler Raum von Ansatzfunktionen V_h auf Γ_h definiert werden, so daß das folgende Problem gestellt werden kann.

$$(P_h) \left\{ \begin{array}{l} \text{Finde } \phi_h \in H_\sigma^1(0, \infty; V_h) \text{ so, daß} \\ \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{\psi_h(x, t) \phi_h'(y, t - |x - y|)}{4\pi|x - y|} ds_y ds_x dt \\ = \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_{\Gamma_h} \psi_h(x, t) g_h'(x, t) ds_x dt \\ \text{für alle } \psi_h \in H_\sigma^1(0, \infty; V_h), \end{array} \right.$$

wobei g_h' eine Approximation in V_h von g' ist. Sei $(\phi_h^j)_{1 \leq j \leq N_h}$ eine Basis von V_h . Dann können die Elemente aus $H_\sigma^1(0, \infty; V_h)$ geschrieben werden als

$$\psi_h(x, t) = \sum_{j=1}^{N_h} \beta_j(t) \phi_h^j(x)$$

mit Funktionen $\beta_j \in H_\sigma^1(0, \infty; \mathbb{R})$, $j = 1, \dots, N_h$. Die obige Formulation lautet dann.

$$(P_h') \left\{ \begin{array}{l} \text{Finde } \alpha_l \in H_\sigma^1(0, \infty; \mathbb{R}) \text{ , } l = 0, \dots, N_h, \text{ so, daß} \\ \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \beta_j(t) \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{\phi_h^j(x) \phi_h^l(y)}{4\pi|x - y|} \alpha_l'(t - |x - y|) ds_y ds_x dt \\ = \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \beta_j(t) \int_{\Gamma_h} \phi_h^j(x) g_h'(x, t) ds_x dt \\ \text{für alle } j = 1, \dots, N_h \text{ und alle } \beta_j \in H_\sigma^1(0, \infty; \mathbb{R}). \end{array} \right.$$

2.5.2 Diskretisierung in der Zeit

Zur Diskretisierung in der Zeit wird eine uniforme Aufteilung der positiven reellen Achse in Intervalle $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$, $n \in \mathbb{N}$, für eine Zeitschrittweite $\Delta t > 0$ betrachtet und die Funktionen α_j und β_j in (P_h') durch Funktionen $\alpha_{j,\Delta t}$ und $\beta_{j,\Delta t}$ ersetzt, die auf jedem Intervall $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$ polynomial vom Grad m_2 sind. Damit die Funktionen in $H_\sigma^1(0, \infty; \mathbb{R})$ liegen, muß $m_2 \geq 1$ gewählt werden. Im Fall $m_2 = 1$ sind die Funktionen affin auf jedem Intervall und 0 für $t = 0$.

Mit einer Basis $(\beta_{n,\Delta t})_{n \in \mathbb{N}}$ lautet die Formulierung.

$$(P_{h,\Delta t}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Finde } (A^k = (a_1^k, \dots, a_{N_h}^k))_{k \in \mathbb{N}} \text{ so, daß} \\ \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \beta_{m,\Delta t}(t) \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{\phi_h^j(x) \phi_h^l(y)}{4\pi|x - y|} \sum_{k=0}^\infty A_l^k \beta_{k,\Delta t}'(t - |x - y|) ds_y ds_x dt \\ = \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \beta_{m,\Delta t}(t) \int_{\Gamma_h} \phi_h^j(x) g_h'(x, t) ds_x dt \\ \text{für alle } l = 1, \dots, N_h, \quad j = 1, \dots, N_h \text{ und alle } m \geq 0. \end{array} \right.$$

Lemma 2.5.1. Das Schema $(P_{h,\Delta t})$ ist konstruktiv. Es läßt sich schreiben in der Form

$$M^0 A^n = B^n - \sum_{k=0}^{n-1} M^{n-k} A^k. \quad (2.36)$$

Beweis. Dies wird später gezeigt, wenn konkrete Ansatzräume gewählt werden. $\square$

2.6 A priori Fehleranalyse und Stabilität

2.6.1 Ungleichungen in $H_\sigma^m(\Delta t, \mathbb{R})$

In diesem Abschnitt werden diskrete Unterräume der Räume $H_\sigma^s(0, \infty; \mathbb{R})$ analysiert. Die Ergebnisse übertragen sich analog auf die Banach-Raum-wertigen Räume $H_\sigma^s(0, \infty; E)$. Dazu werden die beiden folgenden, von klassischen Sobolev-Räumen bekannten, Ergebnisse vorausgesetzt.

Satz 2.6.1. 1. Für $f \in H_\sigma^m(0, \infty; \mathbb{R})$ und $m > 0$ existiert ein $g \in C^{m-1}(0, \infty; \mathbb{R})$ so, daß $f = g$ fast überall.

2. Für $f \in H_\sigma^1(0, \infty; \mathbb{R})$ gilt

$$f(t) = \int_0^t f'(s) ds.$$

Beweis. Der Nachweis erfolgt analog zu den entsprechenden Ergebnissen klassischer Sobolev-Räume. Siehe [A]. $\square$

Definition 2.6.1. Für $\Delta t > 0$ sei $H_\sigma^m(\Delta t, \mathbb{R})$ der Raum aller Funktionen $f \in H_\sigma^m(0, \infty; \mathbb{R})$, deren Ableitung $f^{(m)}$ auf jedem Intervall $I_n := (t_n, t_{n+1}) := (n\Delta t, (n+1)\Delta t)$ konstant ist.

Bemerkung 2.6.1. Für eine Funktion $f \in H_\sigma^m(\Delta t, \mathbb{R})$ liegen alle ihre 'Stammfunktionen' $\Lambda^{-s}f$, $s \in \mathbb{N}$, in $H_\sigma^s(\Delta t, \mathbb{R})$. Dabei ist $\Lambda^0 f = f$ und $\Lambda^{k+1}f$ rekursiv gegeben durch

$$\Lambda^{-(k+1)}f(t) = \int_0^t \Lambda^{-k}f(\tau) d\tau.$$

Im folgenden wird abkürzend $|\cdot|_{\sigma,s}$ anstelle von $|\cdot|_{\sigma,s,\mathbb{R}}$ geschrieben.

Lemma 2.6.1. Für $\sigma_0 > 0$, $\Delta t_0 > 0$ und eine natürliche Zahl $k \geq 1$ existiert eine Konstante $C > 0$ derart, daß

$$|f|_{\sigma, -(k-1)} \leq C \Delta t^{-1} |f|_{\sigma, -k} \quad (2.37)$$

für alle $f \in H_\sigma^0(\Delta t, \mathbb{R})$, $0 \leq \sigma \leq \sigma_0$ und $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$.

Beweis. Für eine Funktion $f \in H_\sigma^0(\Delta t, \mathbb{R})$, d.h. f ist konstant auf jedem Intervall $[t_n, t_{n+1}[$, ist die k -te Stammfunktion definiert durch

$$\Lambda^{-k}f(t) = \sum_{l=0}^k \alpha_{k,l}^n (t - t_n)^l \quad (t_n \leq t \leq t_{n+1})$$

wobei

$$\alpha_{k,l}^n = \Delta t^{k-1} L_{k,l}^n(a_0, \dots, a_n) \quad (0 \leq l \leq k)$$

sofern $f(t) \equiv a_n$ in $[t_n, t_{n+1}]$. $L_{k,l}^n$ ist eine Linearform in $a_0, \dots, a_n$. Differenzieren ergibt

$$\Lambda^{-(k-1)} f(t) = \sum_{l=1}^k \alpha_{k,l}^n l(t-t_n)^{l-1} \quad (t_n \leq t \leq t_{n+1}).$$

Um die Behauptung nachzuweisen genügt es nun, die Terme

$$|f|_{\sigma, -k}^2 = |\Lambda^{-k} f|_{\sigma, 0}^2 = \sum_{n \geq 0} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} \left(\sum_{l=0}^k \alpha_{k,l}^n (t-t_n)^l \right)^2 dt$$

und

$$|f|_{\sigma, -(k-1)}^2 = |\Lambda^{-(k+1)} f|_{\sigma, 0}^2 = \sum_{n \geq 0} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} \left(\sum_{l=1}^k \alpha_{k,l}^n l(t-t_n)^{l-1} \right)^2 dt$$

zu vergleichen. Setze (mit $\alpha_l := \alpha_{k,l}^n$)

$$\begin{aligned} A_n &:= \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} \left(\sum_{l=0}^k \alpha_l (t-t_n)^l \right)^2 dt \\ &= e^{-2\sigma t_n} \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} \left(\sum_{l=0}^k \alpha_l s^l \right)^2 ds \\ &= e^{-2\sigma t_n} \Delta t^{2k+1} \int_0^1 e^{-2\sigma s \Delta t} \left(\sum_{l=0}^k \alpha'_l s^l \right)^2 ds \end{aligned}$$

mit $\alpha_l = \Delta t^{k-l} \alpha'_l$. Analog sei

$$\begin{aligned} B_n &:= \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} \left(\sum_{l=1}^k \alpha_l l(t-t_n)^{l-1} \right)^2 dt \\ &= e^{-2\sigma t_n} \Delta t^{2k-1} \int_0^1 e^{-2\sigma s \Delta t} \left(\sum_{l=1}^k \alpha'_l l s^{l-1} \right)^2 ds. \end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, daß die quadratische Form

$$q_A(\alpha') = \int_0^1 e^{-\mu s} \left(\sum_{l=0}^k \alpha'_l s^l \right)^2 ds$$

das Quadrat einer Norm auf $\mathbb{R}^{k+1}$ von α' definiert die uniform äquivalent ist zur euklidischen Norm für $0 \leq \mu \leq \mu_0$. Ebenso wird eine quadratische Form q_B definiert, die das Quadrat einer Norm auf $\mathbb{R}^k$ definiert. Mit der Äquivalenz zur euklidischen Norm gilt

$$q_B(\alpha'_1, \dots, \alpha'_k) \sim \alpha'^2_1 + \dots + \alpha'^2_k \leq \alpha'^2_0 + \alpha'^2_1 + \dots + \alpha'^2_k \sim q_A(\alpha'_0, \dots, \alpha'_k).$$

Daraus folgt für $\sigma, \Delta t$ so, daß $2\sigma \Delta t \leq \mu_0$ und alle Vektoren $\alpha' \in \mathbb{R}^{k+1}$

$$\Delta t^2 B_n \leq C A_n,$$

wobei die Konstante C abhängt von k und μ . Durch Summieren der Blöcke A_n und B_n über alle n folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 2.6.1. Für $\sigma > 0$ existieren $\Delta t_0 > 0$ und $c > 0$ derart, daß

$$\Delta t^\sigma |f|_{\sigma,0} \leq c |f|_{\sigma,-s} \quad (2.38)$$

für alle $f \in H_\sigma^m(\Delta t, \mathbb{R})$ und $0 < \Delta t < \Delta t_0$.

Beweis. Für ganzzahlige s liefert das vorige Lemma zusammen mit der Identität $|f|_{\sigma,-s} = |\Lambda^{-s}f|_{\sigma,0}$ die Behauptung. Für nicht ganzzahlige $s > 0$ und $k < s < k+1$ definiere $g_1 := \Lambda^{-k}f \in H_\sigma^{m+k}(\Delta t, \mathbb{R})$ und $g_2 := \Lambda^{-(k+1)}f \in H_\sigma^{m+k+1}(\Delta t, \mathbb{R})$. Dann gilt

$$|g_1|_{\sigma,k} \leq C_1 \Delta t^{-k} |g|_{\sigma,0}, \quad |g_2|_{\sigma,k+1} \leq C_2 \Delta t^{-k-1} |g|_{\sigma,0},$$

also

$$|f|_{\sigma,0} \leq C_1 \Delta t^{-k} |f|_{\sigma,-k}, \quad |f|_{\sigma,0} \leq C_2 \Delta t^{-k-1} |g|_{\sigma,-(k+1)},$$

und es kann zwischen den beiden Abschätzungen interpoliert werden. $\square$

2.6.2 Interpolation in $H_\sigma^m(\Delta t, \mathbb{R})$

Lemma 2.6.2. Es sei $f \in H_\sigma^m(0, \infty; \mathbb{R})$ für ein $m > 0$. Für $k < m$ sei der Interpolant $r_{\Delta t}f \in H_\sigma^k(\Delta t, \mathbb{R})$ definiert durch

$$(r_{\Delta t}f)(t) := f(t_n) + (t - t_n)f'(t_n) + \cdots + \frac{(t - t_n)^k}{k!} f^{(k)}(t_n), \quad (t_n \leq t < t_{n+1}).$$

Dann gilt

$$|f - r_{\Delta t}f|_{\sigma,0} \leq C_k \Delta t^{(k+1)} |f|_{\sigma,k+1}. \quad (2.39)$$

Beweis. Die Taylorsche Formel mit Restglied gibt

$$(f - r_{\Delta t}f)(t) = \frac{1}{k!} \int_{t_n}^t (t-s)^k f^{(k+1)}(s) ds \quad (t_n \leq t \leq t_{n+1}).$$

Eine Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung auf das Integral impliziert

$$|(f - r_{\Delta t}f)(t)|^2 \leq \frac{1}{(k!)^2 (2k+1)} (t - t_n)^{2k+1} \int_{t_n}^t |f^{(k+1)}(s)|^2 ds.$$

Durch integrieren der Ungleichung über das Intervall $[t_n, t_{n+1}]$ mit dem Gewicht $e^{-2\sigma t}$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} |(f - r_{\Delta t}f)(t)|^2 dt &\leq \frac{1}{(k!)^2 (2k+1)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} (t - t_n)^{2k+1} \int_{t_n}^t |f^{(k+1)}(s)|^2 ds dt \\ &\leq \frac{1}{(k!)^2 (2k+1)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} (t - t_n)^{2k+1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} |f^{(k+1)}(s)|^2 ds dt \\ &\leq \frac{\Delta t^{2k+2}}{(k!)^2 (2k+1)(2k+2)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma s} |f^{(k+1)}(s)|^2 ds, \end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Ungleichung ausgenutzt wurde, daß das äußere Integral sein Maximum für $t = t_{n+1}$ annimmt und daß $e^{-2\sigma t} \leq e^{-2\sigma s}$ für $s \leq t$. Zum Schluß des Beweises werden die Integrale über die Intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ aufsummiert,

$$\int_0^\infty e^{-2\sigma t} |(f - r_{\Delta t} f)(t)|^2 dt \leq \frac{\Delta t^{2k+2}}{(k!)^2 (2k+1)(2k+2)} \int_0^\infty e^{-2\sigma t} |f^{(k+1)}(s)|^2 ds,$$

das ist aber genau die behauptete Ungleichung. $\square$

Korollar 2.6.2. Mit den gleichen Notationen gilt

$$\begin{aligned} |f - r_{\Delta t} f|_{\sigma, 1/2} &\leq C \Delta t^{k+1/2} |f|_{\sigma, k+1}, \\ |f - r_{\Delta t} f|_{\sigma, -1/2} &\leq C \Delta t^{k+3/2} |f|_{\sigma, k+1}. \end{aligned}$$

Beweis. Es gilt

$$|f - r_{\Delta t} f|_{\sigma, 1} \leq \frac{C}{\Delta t} |f - r_{\Delta t} f|_{\sigma, 0} \leq \frac{C'}{\Delta t} C_k \Delta t^{k+1} |f - r_{\Delta t} f|_{\sigma, k+1}$$

und

$$|f - r_{\Delta t} f|_{\sigma, 0} \leq C_k \Delta t^{k+1} |f - r_{\Delta t} f|_{\sigma, k+1},$$

so daß die Abschätzung für $|f - r_{\Delta t} f|_{\sigma, 1/2}$ durch Interpolation folgt. Zum Beweis der zweiten Aussage wird f durch $g := \Lambda^{-1} f$ ersetzt und mittels

$$|f|_{\sigma, -1} = |g|_{\sigma, 0} \leq C \Delta t^{k+2} |g|_{\sigma, k+2} = C \Delta t^{k+2} |f|_{\sigma, k+1}$$

argumentiert. $\square$

2.6.3 Approximation in $H^s(\Gamma)$

Zur Approximation von Funktionen aus $H^s(\Gamma)$ werden wie oben angedeutet endlich-dimensionale Unterräume V_h von $H^s(\Gamma)$ gewählt. Um Fehlerabschätzungen für die approximierte Lösung herzuleiten, werden die folgenden für Randelementmethoden üblichen Forderungen an die Räume V_h gestellt.

- **(Konvergenzeigenschaft.)** Für $k \leq s$ mit $-m-1 \leq k \leq m$, $-m \leq s \leq m+1$ und für alle $f \in H^s(\Gamma)$ existiert eine Konstante $c_{s,k}$, die unabhängig ist von h und f , und eine Funktion $\bar{f} \in V_h$ so, daß

$$\|f - \bar{f}\|_{H^k(\Gamma)} \leq c_{s,k} h^{s-k} \|f\|_{H^s(\Gamma)}. \quad (2.40)$$

- **(Inverse Abschätzung.)** Für $k \leq s$ mit $|k|, |s| \leq m$ existiert eine Konstante $M_{s,k}$, die unabhängig ist von h , so daß für alle $\bar{g} \in V_h$ gilt

$$\|\bar{g}\|_{H^s(\Gamma)} \leq h^{k-s} \|\bar{g}\|_{H^k(\Gamma)}. \quad (2.41)$$

Der Nachweis dieser Eigenschaften für die unten verwendeten Räume V_h findet sich in der Standardliteratur zu Randelementmethoden.

2.6.4 Stabilität

Es seien ϕ und $\phi_{h,\Delta t}$ die exakte und die numerische Lösung der retardierten Integralgleichung $S\phi = g$. Die Ableitung $\phi' = \partial\phi/\partial t$ erfüllt die Formulierung (P), während $f_{h,\Delta t} := \partial\phi_{h,\Delta t}/\partial t$ als Lösung der folgenden diskreten Formulierung in $H_\sigma^{m_2-1}(\Delta t, V_h)$ berechnet wurde, d.h.

$$(P_{h,\Delta t}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Finde } f_{h,\Delta t} \in H_\sigma^{m_2-1}(\Delta t, V_h) \quad \text{so, daß} \\ b(\psi_{h,\Delta t}, f_{h,\Delta t}) = \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma \psi_{h,\Delta t}(x, t) g'_{h,\Delta t}(x, t) ds_x dt \\ \text{für alle } \psi_{h,\Delta t} \in H_\sigma^{m_2}(\Delta t, V_h), \end{array} \right.$$

wobei die Bilinearform b das iterierte Integral

$$b(\psi_{h,\Delta t}, f_{h,\Delta t}) = \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{\psi_{h,\Delta t}(x, t) f_{h,\Delta t}(y, t - |x - y|)}{4\pi|x - y|} ds_y ds_x dt$$

ist. Setzt man für $\phi_{h,\Delta t} \in H_\sigma^{m_2-1}(\Delta t, V_h)$,

$$b_0(\phi_{h,\Delta t}, f_{h,\Delta t}) := b(\Lambda^{-1}\phi_{h,\Delta t}, f_{h,\Delta t})$$

so ist die obige Formulierung ein klassisches Variationsproblem mit nicht-symmetrischer Bilinearform b_0 auf $H_\sigma^{m_2-1}(\Delta t, V_h)$. Mit den Elliptizitätsabschätzungen für S , d.h. für das obige iterierte Integral, folgt die Elliptizität von b_0 , die die Existenz und Eindeutigkeit von $f_{h,\Delta t}$ in jedem der Unterräume $H_\sigma^k(\Delta t, V_h)$ von $H_\sigma^0(0, \infty; H^{-1/2}(\Gamma))$ garantiert,

$$b_0(f_{h,\Delta t}, f_{h,\Delta t}) = b(\phi_{h,\Delta t}, \partial_t \phi_{h,\Delta t}) \geq C|\phi_{h,\Delta t}|_{\sigma, -1/2, -1/2}^2 \geq C\Delta t^3 |f_{h,\Delta t}|_{\sigma, 0, -1/2}^2.$$

Mit diesen Überlegungen läßt sich eine Stabilitätsaussage in den zugehörigen Funktionenräumen machen.

Satz 2.6.2. Ist $g'_{h,\Delta t}$ eine konsistente Approximation von g' in $H_\sigma^{1/2}(0, \infty; H^{1/2}(\Gamma))$, so ist das Schema (2.36) im folgenden Sinne stabil

$$|\phi_{h,\Delta t}|_{\sigma, -1/2, -1/2} \leq C$$

für $h, \Delta t \rightarrow 0$.

Beweis. Mit der Elliptizität von b_0 folgt, daß

$$\begin{aligned} C|\phi_{h,\Delta t}|_{\sigma, -1/2, -1/2}^2 &\leq b_0(f_{h,\Delta t}, f_{h,\Delta t}) \\ &= \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma f_{h,\Delta t}(x, t) g'_{h,\Delta t}(x, t) ds_x dt \leq |g'_{h,\Delta t}|_{\sigma, 1/2, 1/2} |\phi|_{\sigma, -1/2, -1/2}. \end{aligned}$$

woraus die Behauptung direkt folgt. $\square$

Bemerkung 2.6.2. Für den Fall affin-linearer Ansatzfunktionen in der Zeit, also $m_2 = 1$ läßt sich diese Stabilitätsaussage folgendermaßen formulieren. Zunächst folgt mit der Ungleichung aus Korollar 2.6.1

$$\begin{aligned} \Delta t^3 |\phi'_{h,\Delta t}|_{\sigma, 0, -1/2}^2 &= \Delta t^3 |\phi_{h,\Delta t}|_{\sigma, 1, -1/2}^2 \\ &\leq C|\phi_{h,\Delta t}|_{\sigma, -1/2, -1/2}^2 \\ &\leq C'. \end{aligned}$$

Das heißt aber mit den Notationen aus Abschnitt 2.5.2

$$|\phi'_{h,\Delta t}|_{\sigma,0,-1/2}^2 = \sum_{n \geq 0} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} \|A^n\|^2 dt \leq C',$$

wobei

$$\|A^n\| = \left\| \sum_{j=1}^{N_h} a_j^n \phi_h^j \right\|_{-1/2,\Gamma}$$

Mit

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2\sigma t} dt = e^{-2\sigma t_n} \int_0^{\Delta t} e^{-2\sigma s} ds = e^{-2\sigma t_n} \frac{1 - e^{-2\sigma \Delta t}}{2\sigma},$$

folgt

$$\Delta t^3 \frac{1 - e^{-2\sigma \Delta t}}{2\sigma} \sum_{n \geq 0} e^{-2\sigma t_n} \|A^n\|^2 \leq C$$

und, da $\frac{1 - e^{-2\sigma \Delta t}}{2\sigma} \approx \Delta t$,

$$\sum_{n \geq 0} e^{-2\sigma t_n} \|\Delta t^2 A^n\|^2 \leq C.$$

Das bedeutet, daß die Blöcke A^n von der Ordnung $\Delta t^{-3/2}$ bleiben.

Bemerkung 2.6.3. Die Elliptizitätsabschätzung für S zeigt insbesondere, daß die Konstante C in der Stabilitätsaussage unbeschränkt ist für kleine σ . Diese Erkenntnis gilt ebenfalls für die folgenden Aussagen.

2.6.5 Abschätzungen des Fehlers

Satz 2.6.3. Erfüllt die Lösung ϕ die Regularitätsbedingung

$$\phi \in H_\sigma^2(0, \infty; H^{m_1+1}(\Gamma)) \cap H_\sigma^{m_2+1}(0, \infty; L^2(\Gamma)),$$

so gilt für den Fehler der numerischen Approximation

$$|\phi - \phi_{h,\Delta t}|_{\sigma,-1/2,-1/2} \leq C \left| |g'_{h,\Delta t} - g'|_{\sigma,1/2,1/2} + h^{m_1+1/2} |\phi|_{\sigma,2,m_1+1} + \frac{\Delta t^{m_2-1/2}}{\sqrt{h}} |\phi|_{\sigma,m_2+1,0} \right|.$$

Beweis. Aufgrund der Koerzivität der Bilinearform b folgt für

$$\phi_{h,\Delta t} - \psi_{h,\Delta t} \in H_\sigma^1(0, \infty; H^{-1/2}(\Gamma)),$$

wobei $\psi_{h,\Delta t}$ eine beliebige Funktion aus $H_\sigma^{m_2}(\Delta t, V_h)$ ist, die Ungleichung

$$C |\phi_{h,\Delta t} - \psi_{h,\Delta t}|_{\sigma,-1/2,-1/2}^2 \leq b(\phi_{h,\Delta t} - \psi_{h,\Delta t}, \phi'_{h,\Delta t} - \phi') + b(\phi_{h,\Delta t} - \psi_{h,\Delta t}, \phi' - \psi'_{h,\Delta t}). \quad (2.42)$$

Da $\phi_{h,\Delta t}$ und ϕ Lösung der diskreten bzw. kontinuierlichen Variationsprobleme sind und damit die Formulierungen (P) bzw. $(P_{h,\Delta t})$ erfüllen, gilt für den ersten Term der rechten Seite

$$\begin{aligned}
b(\phi_{h,\Delta t} - \psi_{h,\Delta t}, \phi'_{h,\Delta t} - \phi') &= \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma (\phi_{h,\Delta t} - \psi_{h,\Delta t})(g'_{h,\Delta t} - g') ds_x dt \\
&= \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \langle \phi_{h,\Delta t} - \psi_{h,\Delta t}, g'_{h,\Delta t} - g' \rangle_\Gamma dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \langle L(\phi_{h,\Delta t} - \psi_{h,\Delta t})(\eta + i\sigma), L(g'_{h,\Delta t} - g')(\eta + i\sigma) \rangle_\Gamma d\eta \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |L(\phi_{h,\Delta t} - \psi_{h,\Delta t})(\eta + i\sigma)|_{H^{-1/2}(\Gamma)} |L(g'_{h,\Delta t} - g')(\eta + i\sigma)|_{H^{1/2}(\Gamma)} d\eta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |\omega|^{-1/2} |L(\phi_{h,\Delta t} - \psi_{h,\Delta t})(\eta + i\sigma)|_{H^{-1/2}(\Gamma)} |\omega|^{1/2} |L(g'_{h,\Delta t} - g')(\eta + i\sigma)|_{H^{1/2}(\Gamma)} d\eta \\
&\leq |\phi_{h,\Delta t} - \psi_{h,\Delta t}|_{\sigma, -1/2, -1/2} |g'_{h,\Delta t} - g'|_{\sigma, 1/2, 1/2}.
\end{aligned}$$

Mit der Stetigkeit von b läßt sich der zweite Term in (2.42) abschätzen durch

$$|b(\phi_{h,\Delta t} - \psi_{h,\Delta t}, \phi' - \psi'_{h,\Delta t})| \leq C |\phi_{h,\Delta t} - \psi_{h,\Delta t}|_{\sigma, -1/2, 0} |\phi' - \psi'_{h,\Delta t}|_{\sigma, 1/2, 0}$$

und mit Hilfe von (2.41) ergibt sich

$$|b(\phi_{h,\Delta t} - \psi_{h,\Delta t}, \phi' - \psi'_{h,\Delta t})| \leq \frac{C}{\sqrt{h}} |\phi_{h,\Delta t} - \psi_{h,\Delta t}|_{\sigma, -1/2, -1/2} |\phi' - \psi'_{h,\Delta t}|_{\sigma, 1/2, 0}.$$

Benutzt man diese Abschätzungen nun in (2.42) und teilt durch $|\phi_{h,\Delta t} - \psi_{h,\Delta t}|_{\sigma, -1/2, -1/2}$, so folgt

$$|\phi_{h,\Delta t} - \psi_{h,\Delta t}|_{\sigma, -1/2, -1/2} \leq C \left| |g'_{h,\Delta t} - g'|_{\sigma, 1/2, 1/2} + \frac{1}{\sqrt{h}} |\phi' - \psi'_{h,\Delta t}|_{\sigma, 1/2, 0} \right|,$$

woraus unter einmaliger Benutzung der Dreiecksungleichung und der Berücksichtigung der Tatsache, daß $\psi_{h,\Delta t}$ beliebig aus $H_\sigma^{m_2}(\Delta t, V_h)$ gewählt wurde, die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&|\phi - \phi_{h,\Delta t}|_{\sigma, -1/2, -1/2} \\
&\leq C \left| |g' - g'_{h,\Delta t}|_{\sigma, 1/2, 1/2} + \inf_{\psi_{h,\Delta t} \in H_\sigma^{m_2}(\Delta t, V_h)} \left\{ |\phi - \psi_{h,\Delta t}|_{\sigma, -1/2, -1/2} + \frac{1}{\sqrt{h}} |\phi' - \psi'_{h,\Delta t}|_{\sigma, 1/2, 0} \right\} \right|
\end{aligned}$$

folgt. Zum Nachweis der Behauptung bleibt noch die Abschätzung des Infimums. Wegen der Regularitätsvoraussetzung gilt $\phi \in C^{m_2}(0, \infty; L^2(\Gamma))$. Damit ist die L^2 -Projektion von ϕ auf V_h , $\psi_h(\cdot, t) := q_h \phi(\cdot, t)$, eine Funktion im Raum $C^{m_2}(0, \infty; V_h)$. Mit der Eigenschaft 2.40 gilt zunächst

$$|\phi(\cdot, t) - \psi_h(\cdot, t)|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq Ch^{m_1+3/2} |\phi(\cdot, t)|_{H^{m_1+1}(\Gamma)} \quad (t \geq 0),$$

woraus durch Integration mit dem Gewicht $e^{-2\sigma t}$ in der Zeit folgt

$$|\phi - \psi_h|_{\sigma, 0, -1/2} \leq Ch^{m_1+3/2} |\phi|_{\sigma, 0, m_1+1}. \quad (2.43)$$

Unter Benutzung der Identität

$$\int_0^t \psi_h(s) ds = q_h \left(\int_0^t \phi(s) ds \right)$$

folgt die gleiche Abschätzung für die zeitliche Ableitung von ϕ ,

$$|\phi - \psi_h|_{\sigma, -1, -1/2} \leq Ch^{m_1+3/2} |\phi|_{\sigma, 0, m_1+1}. \quad (2.44)$$

Aus (2.43) und (2.44) erhält man

$$|\phi - \psi_h|_{\sigma, -1/2, -1/2} \leq Ch^{m_1+3/2} |\phi|_{\sigma, 0, m_1+1}. \quad (2.45)$$

Es sei $\psi_{h,\Delta t} := r_{\Delta t} \psi_h$. Dann folgt mit Lemma 2.6.2

$$|\psi_h - \psi_{h,\Delta t}|_{\sigma, -1/2, -1/2} \leq C\Delta t^{m_2+3/2} |\psi_h|_{\sigma, m_2+1, -1/2}.$$

Aus den Stetigkeitseigenschaften der Projektion q_h folgt die Abschätzung

$$|\psi_h(\cdot, t)|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq |\psi_h(\cdot, t)|_{L^2(\Gamma)} \leq |\phi(\cdot, t)|_{L^2(\Gamma)},$$

wobei die erste Ungleichung allgemein gilt. Dieselbe Abschätzung gilt analog für die zeitlichen Ableitungen von ψ_h und ϕ . Als direkte Konsequenz erhält man

$$|\psi_h - \psi_{h,\Delta t}|_{\sigma, -1/2, -1/2} \leq C\Delta t^{m_2+3/2} |\phi|_{\sigma, m_2+1, 0}. \quad (2.46)$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} |\phi - \psi_{h,\Delta t}|_{\sigma, -1/2, -1/2} &\leq |\phi - \psi_h|_{\sigma, -1/2, -1/2} + |\psi_h - \psi_{h,\Delta t}|_{\sigma, -1/2, -1/2} \\ &\leq Ch^{m_1+3/2} |\phi|_{\sigma, 0, m_1+1} + C'\Delta t^{m_2+1/2} |\phi|_{\sigma, m_2+1, 0} \end{aligned}$$

und auf gleichem Wege folgen die Ungleichungen

$$|\phi' - \psi'_h|_{\sigma, 1/2, 0} \leq Ch^{m_1+1} |\phi|_{\sigma, 2, m_1+1}. \quad (2.47)$$

$$|\psi'_h - \psi'_{h,\Delta t}|_{\sigma, 1/2, 0} \leq C\Delta t^{m_2-1/2} |\phi|_{\sigma, m_2+1, 0}. \quad (2.48)$$

Mit den Resultaten (2.45)-(2.48) kann nun eine obere Schranke des Infimums angegeben werden

$$\begin{aligned} &\inf_{\psi_{h,\Delta t} \in H_{\sigma}^{m_2}(\Delta t, V_h)} \left\{ |\phi - \psi_{h,\Delta t}|_{\sigma, -1/2, -1/2} + \frac{1}{\sqrt{h}} |\phi' - \psi'_{h,\Delta t}|_{\sigma, 1/2, 0} \right\} \\ &\leq C \left| h^{m_1+1/2} (|\phi|_{\sigma, 2, m_1+1} + h|\phi|_{\sigma, 0, m_1+1}) + \frac{\Delta t^{m_2-1/2}}{\sqrt{h}} (|\phi|_{\sigma, m_2+1, 0} + \sqrt{h}\Delta t^2 |\phi|_{\sigma, m_2+1, 0}) \right|. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $|\phi|_{\sigma, 0, m_1+1} \leq C|\phi|_{\sigma, 2, m_1+1}$, was sich direkt aus der Definition von $|\cdot|_{\sigma, s, E}$ ergibt, und mit $|\phi|_{\sigma, m_2+1, -1/2} \leq |\phi|_{\sigma, m_2+1, 0}$ folgt die behauptete Abschätzung des Fehlers. $\square$

In der Praxis ist es einfacher, den Fehler in der Norm $H_{\sigma}^0(0, \infty; L^2(\Gamma))$ zu bestimmen. Daher ist im folgenden Satz eine Abschätzung in dieser Norm gegeben. Der Beweis erfolgt ähnlich zu dem der vorigen Aussage.

Satz 2.6.4. Erfüllt die Lösung ϕ die Regularitätsbedingung

$$\phi \in H_{\sigma}^1(0, \infty; H^{m_1+1}(\Gamma)) \cap H_{\sigma}^{m_2+1}(0, \infty; L^2(\Gamma)),$$

so gilt für den Fehler der numerischen Approximation

$$|\phi - \phi_{h,\Delta t}|_{\sigma,0,0} \leq C \left| \frac{1}{\sqrt{h}\sqrt{\Delta t}} |g'_{h,\Delta t} - g'|_{\sigma,1/2,1/2} + \frac{h^{m_1+1/2}}{\sqrt{\Delta t}} |\phi|_{\sigma,2,m_1+1} + \frac{\Delta t^{m_2-1/2}}{\sqrt{h}} |\phi|_{\sigma,m_2+1,0} \right|.$$

Bemerkung 2.6.4. Die Regularitätsbedingungen in den Sätzen kann nicht bewiesen werden, sie scheint jedoch erfüllt zu sein, falls g sehr glatt ist.

Bemerkung 2.6.5. Die beiden Sätze zeigen insbesondere, daß bei einem konstanten Verhältnis zwischen Netz- und Zeitschrittweite die optimale Wahl der Polynomgrade durch $m_2 = m_1 + 1$ gegeben ist.



Kapitel 3

Numerik der retardierten Potentialintegralgleichung

3.1 Kollokationsmethode

In diesem Abschnitt wird die retardierte Potentialintegralgleichung direkt gelöst nach einer Methode, die von Davies und Duncan in [DaDu] für Quadrate benutzt wird.

Für eine gegebene Funktion g in Raum und Zeit und eine glatte Oberfläche $P \subset \mathbb{R}^3$ ist eine Funktion u zu bestimmen so, daß

$$g(x, t) = \int_P \frac{u(y, t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y.$$

Die Oberfläche P wird regulär trianguliert in flache Dreiecke $T \in \mathcal{T}$ und u wird approximiert durch eine Funktion U , die stückweise konstant ist im Ort und stückweise affin-linear, global stetig in der Zeit für eine uniforme Diskretisierung des Intervalls $[0, T]$ mit Zeitschrittweite Δt , d.h.

$$U(x, t) = \sum_{T \in \mathcal{T}} \chi_T(x) u_T(t),$$

wobei $\chi_T(x) = 1$, falls $x \in T$, $\chi_T(x) = 0$ sonst, und

$$u_T(t) := \sum_{i=0}^N u_T^i \beta_i(t),$$

für die temporären nodalen Basisfunktionen β_i , d.h. $\beta_i(j\Delta t) = \delta_{ij}$, und eine geeignete Wahl von N , so daß die Approximationslösung bis zum Zeitpunkt $N\Delta t \approx T$ berechnet wird. Diese Approximation wird in die Gleichung eingesetzt, die dann an den Mittelpunkten $x_{T'}$ der Dreiecke $T' \in \mathcal{T}$ und ganzzahligen Vielfachen $t^n := n\Delta t$ der Zeitschrittweite Δt getestet wird. Dies gibt

$$\begin{aligned} g(x_{T'}, t^n) &= \sum_{S \in \mathcal{T}} \int_S \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{\chi_T(x_{T'}) u_T(t^n - |x_{T'} - y|)}{|x_{T'} - y|} ds_y \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \frac{u_T(t^n - |x_{T'} - y|)}{|x_{T'} - y|} ds_y \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T} \setminus T'} \int_T \frac{u_T(t^n - |x_{T'} - y|)}{|x_{T'} - y|} ds_y + \int_{T'} \frac{u_{T'}(t^n - |x_{T'} - y|)}{|x_{T'} - y|} ds_y. \end{aligned}$$

Die Integrale in der Summe werden mit Einpunktquadraturen am Mittelpunkt approximiert. Dazu sei Φ_T die affin-lineare Transformation, die das Dreieck $T_{ref} = \text{conv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ orientie-

ungstreu auf T abbildet. Es ist dann

$$\begin{aligned} \int_T \frac{u_T(t^n - |x_{T'} - y|)}{|x_{T'} - y|} ds_y &= \int_{T_{ref}} \frac{u_T(t^n - |x_{T'} - \Phi_T(y)|)}{|x_{T'} - \Phi_T(y)|} \text{gram } \Phi_T ds_y \\ &\approx \frac{1}{2} \frac{u_T(t^n - |x_{T'} - \Phi_T(x_{T_{ref}})|)}{|x_{T'} - \Phi_T(x_{T_{ref}})|} \text{gram } \Phi_T, \end{aligned}$$

wobei $\text{gram } \Phi_T := \sqrt{\det((D\Phi_T)^t D\Phi_T)}$ die Gramsche Determinante der Transformation ist. Das *singuläre Integral* wird wie folgt behandelt,

$$\begin{aligned} \int_{T'} \frac{u_{T'}(t^n - |x_{T'} - y|)}{|x_{T'} - y|} ds_y &= \int_{T_{ref}} \frac{u_{T'}(t^n - |x_{T'} - \Phi_{T'}(y)|)}{|x_{T'} - \Phi_{T'}(y)|} \text{gram } \Phi_{T'} ds_y \\ &\approx u_{T'}(t^n - |x_{T'} - \Phi_{T'}(x_{T_{ref}})|) \int_{T_{ref}} \frac{1}{|x_{T'} - \Phi_{T'}(y)|} \text{gram } \Phi_{T'} ds_y \\ &= u_{T'}(t^n) \int_{T_{ref}} \frac{1}{|x_{T'} - \Phi_{T'}(y)|} \text{gram } \Phi_{T'} ds_y, \end{aligned}$$

wobei $\Phi_{T'}(1/3, 1/3) = x_{T'}$ benutzt wurde. Diese Approximationen führen auf die Gleichung

$$C_{T',T'} u_{T'}(t^n) = g(x_{T'}, t^n) - \sum_{T \in \mathcal{T} \setminus T'} C_{T',T} u_T(t^n - |x_{T'} - \Phi_T(1/3, 1/3)|), \quad (3.1)$$

mit

$$C_{T',T'} = \text{gram } \Phi_{T'} \int_{T_{ref}} \frac{1}{|x_{T'} - \Phi_{T'}(y)|} ds_y \quad \text{und} \quad C_{T',T} = \frac{\text{gram } \Phi_T}{2|x_{T'} - x_T|}.$$

Die Konstanten $C_{T',T'}$ können entweder numerisch approximiert oder analytisch berechnet werden (vergl. Abschnitt 3.3). Die Terme $u_T(t^n - |x_{T'} - x_T|)$ können aufgrund der stückweisen Linearität der Funktionen u_T exakt ausgewertet werden, indem zwischen ganzzahligen Vielfachen von Δt interpoliert wird, genauer gilt

$$u_T(t^n - |x_{T'} - x_T|) = (1 - \epsilon_{T',T}) u_T((n - m_{T',T}) \Delta t) + \epsilon_{T',T} u_T((n - m_{T',T} - 1) \Delta t),$$

wobei

$$m_{T',T} = \lfloor |x_{T'} - x_T| / \Delta t \rfloor \quad \text{und} \quad \epsilon_{T',T} = |x_{T'} - x_T| / \Delta t - m_{T',T},$$

mit der Operation $\lfloor \cdot \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z}; k \leq \cdot\}$. Einsetzen dieser Umformungen in Gleichung (3.1) ergibt

$$C_{T',T'} u_{T'}^n = g(x_{T'}, n \Delta t) - \sum_{T \in \mathcal{T} \setminus T_j} C_{T',T} \left((1 - \epsilon_{T',T}) u_T^{n-m_{T',T}} + \epsilon_{T',T} u_T^{n-m_{T',T}-1} \right).$$

Das Schema kann nun in Matrixnotation geschrieben werden, d.h. es wird an allen Mittelpunkten $\{x_T\}_{T \in \mathcal{T}}$ gleichzeitig getestet. Mit der Anfangsbedingung $U \equiv 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ und den Koeffizientenvektoren $\underline{u}^n = (u_{T_j}^n)_{j=1, \dots, |\mathcal{T}|}$, $\underline{g}^n = (g(x_{T_j}, t^n))_{j=1, \dots, |\mathcal{T}|}$ ergibt sich das Verfahren

$$Q^0 \underline{u}^n = \underline{g}^n - \sum_{m=1}^{n-1} Q^m \underline{u}^{n-m}, \quad (3.2)$$

wobei die Matrizen Q^m gegeben sind durch

$$Q^m(j, k) = \sum_{m_{T_j, T_k} = m} C_{T_j, T_k} (1 - \epsilon_{T_j, T_k}) + \sum_{m_{T_j, T_k} = m-1} C_{T_j, T_k} \epsilon_{T_j, T_k}, \quad \text{falls } m \neq 0,$$

$$Q^0(j, k) = \begin{cases} C_{T_j, T_k}, & \text{falls } j = k, \\ \sum_{m_{T_j, T_k} = 0} C_{T_j, T_k} (1 - \epsilon_{T_j, T_k}), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Matrix Q^0 ist diagonal, wenn das *Netzverhältnis* $r := \min_{T_1, T_2 \in \mathcal{T}, T_1 \neq T_2} \Delta t / |x_{T_1} - x_{T_2}|$ kleiner oder gleich eins ist, so daß das Schema explizit ist für $r \leq 1$. Unabhängig von r braucht Q^0 nur ein einziges Mal invertiert zu werden. In einer Implementation kann beispielsweise eine LU -Zerlegung von Q^0 durchgeführt und abgespeichert werden. Die Matrizen Q^m sind schwach besetzt und repräsentieren verschiedene Zeitebenen, d.h. daß der Zeit-Raumkegel, der die Berechnung der Lösung in einem bestimmten Punkt beeinflußt, zerlegt wird in Kreisringe zu unterschiedlichen zurückliegenden Zeiten. Für eine beschränkte Oberfläche P , d.h. P hat endlichen Durchmesser, heißt dies insbesondere, daß nur endlich viele Matrizen Q^m von Null verschieden sind. Der maximale Index ist dabei kleiner oder gleich $\lfloor \text{diam}(P) / \Delta t \rfloor + 1$.

Numerisches Beispiel. Als erstes einfaches Beispiel sei $P = [0, 1]^2 \times \{0\}$ und $g(x, t) = \exp(-10(t - 2.5)^2)$. P wird uniform diskretisiert in halbierte Quadrate mit Seitenlänge h . In Abbildung 3.2 ist der Logarithmus der L^2 -Norm $\|U(\cdot, t)\|_{2,P}$ als Funktion in der Zeit dargestellt, während die Abbildung 3.1 das zeitliche Verhalten der Lösung am Mittelpunkt der Platte zeigt. Die tatsächliche Lösung dieses Beispiels kann experimentell bestimmt werden und zeigt, daß die Lösung nach $t \approx 15$ rasch verschwindet. Für die meisten Netzverhältnisse wächst die Lösung exponentiell, was ein eindeutiges Indiz für Instabilität des Verfahrens ist. Im Gegensatz zu den Resultaten von Duncan und Davies in [DaDu] für Quadrate, bei denen der Algorithmus stabil ist für Netzverhältnisse $r \in]0.65, 1]$, kann hier keine Vorhersage über Stabilität gemacht werden. Es ist interessant zu beobachten, daß die Instabilitäten regulär sind in dem Sinne, daß die Lösung auf benachbarten Dreiecken unterschiedliche Vorzeichen annimmt (vergleiche Abbildung 3.3). Glättungsoperatoren können verwendet werden, um diese Instabilitäten zu beseitigen (siehe [DaDu], [Ry1] und Abschnitt 3.6.2). In den Beispielen wurden die Koeffizienten $C_{T', T'}$ analytisch berechnet (vergl. Abschnitt 3.3).

3.2 Ein einfaches Galerkin-Schema

Satz 2.4.4 besagt, daß die retardierte Potentialintegralgleichung zu einer koerziven Bilinearform assoziiert ist. Wie in Abschnitt 2.5 bereits geschildert wurde, kann die Lösung des Variationsproblems (P) von Seite 55 mit Hilfe von diskreten Teilräumen $V_{h, \Delta t}$ von $H_o^1(0, \infty; H^{-1/2}(P))$ approximiert werden. Zunächst wird für $V_{h, \Delta t}$ der Raum der Funktionen gewählt, die stückweise konstant im Ort und stückweise affin-linear in der Zeit sind für eine reguläre Triangulierung $\mathcal{T}$ von P in flache Dreiecke und eine uniforme Diskretisierung des betrachteten Zeitintervalls mit Zeitschrittweite Δt ,

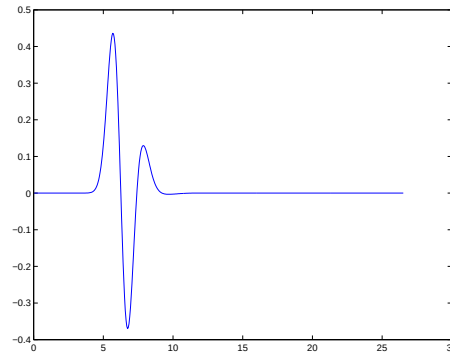


Abbildung 3.1 Stabile Lösung der Kollokationsmethode nahe des Mittelpunktes der Platte mit $r = 0.9$, $h = 1/16$ aufgetragen gegen die Zeit

d.h.

$$V_{h,\Delta t} = \left\{ f \in H_\sigma^1(0, \infty; H^{-1/2}(\tilde{P})); f(x, t) = \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{n=0}^N u_T^n \beta_n(t) \chi_T(x), (u_T^n)_{T \in \mathcal{T}, 0 \leq n \leq N} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T} \times (N+1)} \right\}.$$

Dabei bezeichnen χ_T und β_n dieselben Funktionen wie im vorigen Abschnitt. $\tilde{P}$ bezeichnet die diskretisierte Oberfläche, d.h. $\tilde{P} := \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$. Die Bilinearform b aus (2.35) läßt sich wie folgt diskretisieren: Es sei $f \in V_{h,\Delta t}$ mit Koeffizienten (u_T^n) und $u_T(t) := \sum_{j=0}^N u_T^j \beta_j(t)$. Aufgrund der Bilinearität ist es zunächst ausreichend, $b(\psi_n \chi_T, f)$ zu berechnen. Es ist mit einer einfachen Approximation des Zeitintegrals

$$\begin{aligned} b(\psi_n \chi_{T'}, f) &= \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_{\tilde{P}} \int_{\tilde{P}} \frac{\chi_{T'}(x) \psi_n(t) \partial_t f(y, t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y ds_x dt \\ &\approx 2\Delta t e^{-2\sigma t^n} \int_{\tilde{P}} \int_{\tilde{P}} \frac{\chi_{T'}(x) \psi_n(t^n) \partial_t f(y, t^n - |x - y|)}{|x - y|} ds_y ds_x \\ &= 2\Delta t e^{-2\sigma t^n} \int_{\tilde{P}} \int_{\tilde{P}} \frac{\chi_{T'}(x) \partial_t f(y, t^n - |x - y|)}{|x - y|} ds_y ds_x \\ &= 2\Delta t e^{-2\sigma t^n} \int_{T'} \int_{\tilde{P}} \frac{\partial_t f(y, t^n - |x - y|)}{|x - y|} ds_y ds_x \\ &= 2\Delta t e^{-2\sigma t^n} \int_{T'} \int_{\tilde{P}} \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{\chi_T(x) \partial_t u_T(t^n - |x - y|)}{|x - y|} ds_y ds_x \\ &= 2\Delta t e^{-2\sigma t^n} \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_{T'} \int_{\tilde{P}} \frac{\chi_T(x) \partial_t u_T(t^n - |x - y|)}{|x - y|} ds_y ds_x \\ &= 2\Delta t e^{-2\sigma t^n} \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_{T'} \int_T \frac{\partial_t u_T(t^n - |x - y|)}{|x - y|} ds_y ds_x \\ &= 2\Delta t e^{-2\sigma t^n} \sum_{T \in \mathcal{T} \setminus T'} \int_{T'} \int_T \frac{\partial_t u_T(t^n - |x - y|)}{|x - y|} ds_y ds_x \\ &\quad + 2\Delta t e^{-2\sigma t^n} \int_{T'} \int_{T'} \frac{\partial_t u_{T'}(t^n - |x - y|)}{|x - y|} ds_y ds_x \end{aligned}$$

Die Integrale in der Summe werden durch Gaußsche Dreipunkt-Quadraturen approximiert. Dazu bezeichne wieder Φ_T die affin-lineare Transformation, die das Referenzdreieck T_{ref} orientierungs-

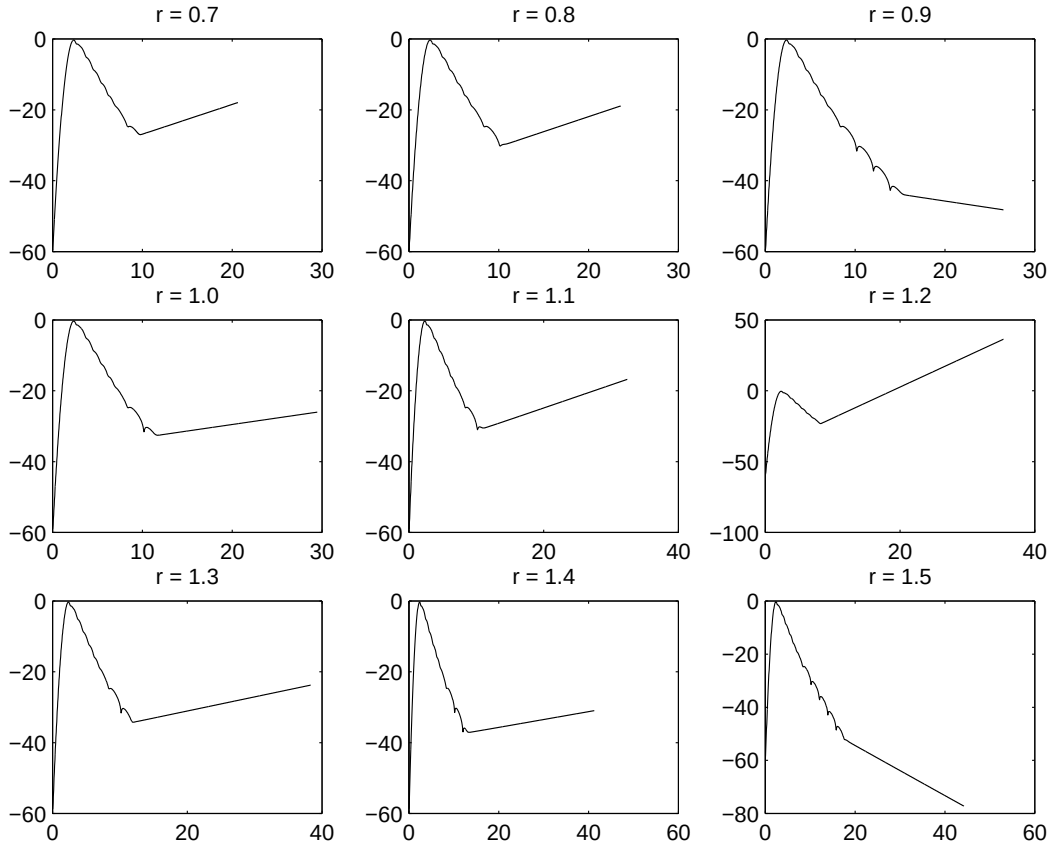


Abbildung 3.2 Logarithmus der L^2 -Norm der numerischen Lösung aufgetragen gegen die Zeit für die Kollokationsmethode für verschiedene Netzverhältnisse r mit $h = 1/16$

treu auf T abbildet. Es ist dann

$$\begin{aligned}
 & \int_{T'} \int_T \frac{\partial_t u_T(t^n - |x - y|)}{|x - y|} ds_y ds_x \\
 &= \int_{T_{ref}} \int_{T_{ref}} \frac{\partial_t u_T(t^n - |\Phi_{T'}(x) - \Phi_T(y)|)}{|\Phi_{T'}(x) - \Phi_T(y)|} \text{gram } \Phi_T ds_y \text{gram } \Phi_{T'} ds_x \\
 &\approx \sum_{\beta=1}^3 \int_{T_{ref}} \omega_\beta \frac{\partial_t u_T(t^n - |\Phi_{T'}(x) - \Phi_T(\xi_\beta)|)}{|\Phi_{T'}(x) - \Phi_T(\xi_\beta)|} \text{gram } \Phi_T \text{gram } \Phi_{T'} ds_x \\
 &\approx \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha \sum_{\beta=1}^3 \omega_\beta \frac{\partial_t u_T(t^n - |\Phi_{T'}(\xi_\alpha) - \Phi_T(\xi_\beta)|)}{|\Phi_{T'}(\xi_\alpha) - \Phi_T(\xi_\beta)|} \text{gram } \Phi_T \text{gram } \Phi_{T'} \\
 &= \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \omega_\alpha \omega_\beta \frac{\partial_t u_T(t^n - |\Phi_{T'}(\xi_\alpha) - \Phi_T(\xi_\beta)|)}{|\Phi_{T'}(\xi_\alpha) - \Phi_T(\xi_\beta)|} \text{gram } \Phi_T \text{gram } \Phi_{T'},
 \end{aligned}$$

wobei $\xi_\alpha, \alpha = 1, \dots, 3$, die Gaußschen-Quadraturpunkte auf T_{ref} und $\omega_\alpha, \alpha = 1, \dots, 3$, die zugehörigen Gewichte sind. Das singuläre Integral wird approximiert durch

$$\int_{T'} \int_{T'} \frac{\partial_t u_{T'}(t^n - |x - y|)}{|x - y|} ds_y ds_x \approx \partial_t u_{T'}(t^n) \frac{\text{gram } \Phi_{T'}}{2} \int_{T'} \frac{1}{|x_{T'} - y|} ds_y.$$

Dabei kann das Integral auf der rechten Seite entweder analytisch oder numerisch berechnet werden (vergl. Abschnitt 3.3). Für die lineare Form in der Formulierung (P) von Seite 55, also die rechte

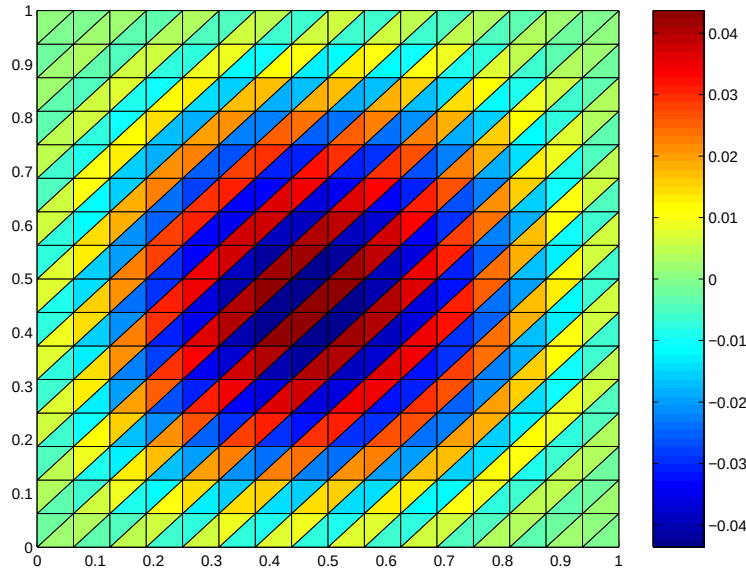


Abbildung 3.3 Instabile Lösung aus der Kollokationsmethode nach 500 Zeitschritten für ein Netzverhältnis $r = 0.6$ und $h = 1/16$. Dabei ist besonders die Regularität der Instabilität zu beachten

Seite der Variationsformulierung, ergibt sich

$$\int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_{\tilde{P}} \chi_{T'}(x) \psi_n(t) \partial_t g(x, t) ds_x dt \approx 2\Delta t e^{-2\sigma t^n} \text{gram } \Phi_{T'} \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha \partial_t g(\Phi_{T'}(\xi_\alpha), t^n).$$

Nach Dividieren durch $\text{gram } \Phi_{T'}$ und $2\Delta t e^{-2\sigma t^n}$ führen die Approximationen auf die Gleichung

$$C_{T',T'} \partial_t u_{T'}(t^n) = \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha \partial_t g(\Phi_{T'}(\xi_\alpha), t^n) - \sum_{T \in \mathcal{T} \setminus T'} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 C_{T',T}^{\alpha,\beta} \partial_t u_T(t^n - |\Phi_{T'}(\xi_\alpha) - \Phi_T(\xi_\beta)|), \quad (3.3)$$

wobei ähnlich wie beim Kollokationsverfahren

$$C_{T',T'} = \frac{1}{2} \int_{T'} \frac{1}{|x_{T'} - y|} ds_y, \\ C_{T',T}^{\alpha,\beta} = \omega_\alpha \omega_\beta \frac{\text{gram } \Phi_T}{|\Phi_{T'}(\xi_\alpha) - \Phi_T(\xi_\beta)|}.$$

Eine zeitliche Integration der Gleichung (3.3) führt, unter Verwendung von $u_{T'}(0) = g(\cdot, 0) = 0$, auf die Relation

$$C_{T',T'} u_{T'}(t^n) = \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha g(\Phi_{T'}(\xi_\alpha), t^n) - \sum_{T \in \mathcal{T} \setminus T'} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 C_{T',T}^{\alpha,\beta} u_T(t^n - |\Phi_{T'}(\xi_\alpha) - \Phi_T(\xi_\beta)|). \quad (3.4)$$

Dieser Schritt ist möglich, da in der mathematischen Formulierung des Modellproblems die Funktion g zum Zeitpunkt $t = 0$ als verschwindend angenommen wurde, während dies für die Lösung ohnehin gefordert ist. Die Terme $u_T(t^n - |\Phi_{T'}(\xi_\alpha) - \Phi_T(\xi_\beta)|)$ können wiederum durch Interpolation zwischen ganzzahligen Vielfachen von Δt errechnet werden. Dies gibt

$$u_T(t^n - |\Phi_{T'}(\xi_\alpha) - \Phi_T(\xi_\beta)|) = (1 - \epsilon_{T',T}^{\alpha,\beta}) u_T((n - m_{T',T}^{\alpha,\beta}) \Delta t) + \epsilon_{T',T}^{\alpha,\beta} u_T((n - m_{T',T}^{\alpha,\beta} - 1) \Delta t),$$

wobei

$$m_{T',T}^{\alpha,\beta} = \lfloor |\Phi_{T'}(\xi_\alpha) - \Phi_T(\xi_\beta)| / \Delta t \rfloor \quad \text{und} \quad \epsilon_{T',T}^{\alpha,\beta} = |\Phi_{T'}(\xi_\alpha) - \Phi_T(\xi_\beta)| / \Delta t - m_{T',T}^{\alpha,\beta}.$$

Einsetzen in die Gleichung (3.4) resultiert in dem Schema

$$\begin{aligned} C_{T',T'} u_{T'}^n &= \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha g(\Phi_{T'}(\xi_\alpha), n\Delta t) \\ &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T} \setminus T'} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 C_{T',T}^{\alpha,\beta} \left((1 - \epsilon_{T',T}^{\alpha,\beta}) u_T^{(n-m_{T',T}^{\alpha,\beta})} + \epsilon_{T',T}^{\alpha,\beta} u_T^{(n-m_{T',T}^{\alpha,\beta}-1)} \right). \end{aligned}$$

Damit läßt sich (3.4) in Matrix-Notation schreiben, d.h. es wird mit allen Basisfunktionen gleichzeitig getestet. Die diskrete Lösung $U \in V_{\mathcal{T},\Delta t}$ erfüllt dann, unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $U^0 \equiv 0$, das Gleichungssystem

$$Q^0 U^n = b^n - \sum_{m=1}^{n-1} Q^m U^{n-m},$$

wobei U^i , b^i Vektoren mit den Einträgen $u_{T'}^i$ bzw. $\sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha g(\Phi_{T'}(\xi_\alpha), i\Delta t)$ sind. Die Matrizen Q^m sind gegeben durch

$$Q^m(j, k) = \sum_{m_{T_j, T_k}^{\alpha,\beta} = m} C_{T_j, T_k}^{\alpha,\beta} (1 - \epsilon_{T_j, T_k}^{\alpha,\beta}) + \sum_{m_{T_j, T_k}^{\alpha,\beta} = m-1} C_{T_j, T_k}^{\alpha,\beta} \epsilon_{T_j, T_k}^{\alpha,\beta}, \quad \text{falls } m \neq 0,$$

$$Q^0(j, k) = \begin{cases} C_{T_j, T_j}, & \text{falls } j = k, \\ \sum_{m_{T_j, T_k}^{\alpha,\beta} = 0} C_{T_j, T_k}^{\alpha,\beta} (1 - \epsilon_{T_j, T_k}^{\alpha,\beta}), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Gegensatz zur Kollokationsmethode ist die Matrix Q^0 hier diagonal, falls die Zeitschrittweite Δt dividiert durch den minimalen aller Abstände zwischen zwei Gauß-Punkten auf zwei verschiedenen Dreiecken kleiner als eins ist. Für halbierte Quadrate mit Seitenlänge h lautet diese Bedingung $r < \sqrt{2}h/3$, mit dem Netzverhältnis r aus dem vorigen Abschnitt. Wie bei der Kollokationsmethode sind die Matrizen Q^m schwachbesetzt und nur endlich viele sind nicht-verschwindend. Wieder kann eine einmalige LU -Zerlegung der Matrix Q^0 durchgeführt werden.

Numerische Ergebnisse. Die Abbildungen 3.4 und 3.6 zeigen die numerischen Ergebnisse für das Beispiel aus Abschnitt 3.1. Es ist überraschend, daß alle getesteten Netzverhältnisse stabile Lösungen geben. Für sehr kleine Werte von r erreicht die Lösung ihr Maximum später, als Beobachtungen es erwarten lassen, d.h. die Lösung ist falsch. Dieses Phänomen läßt sich dadurch erklären, daß hier der Unterschied zwischen der auf den Wert eins skalierten Lichtgeschwindigkeit und dem Netzverhältnis sehr groß ist. In der Simulation wirkt sich dies durch Auslassen wichtiger Zeitebenen beim Berechnen eines Lösungswertes aus. Das Netzverhältnis sollte daher - sofern möglich - nahe an eins gewählt werden. Abbildung 3.5 zeigt die stabile Lösung für $r = 0.6$ und $h = 1/16$ nach 500 Zeitschritten. In den Beispielen wurde wieder die analytische Berechnung der Koeffizienten $C_{T',T'}$ gewählt.

Bemerkung 3.2.1. Die Bedeutung des Integrationsschritts in der Diskretisierung wird später noch einmal analysiert werden.

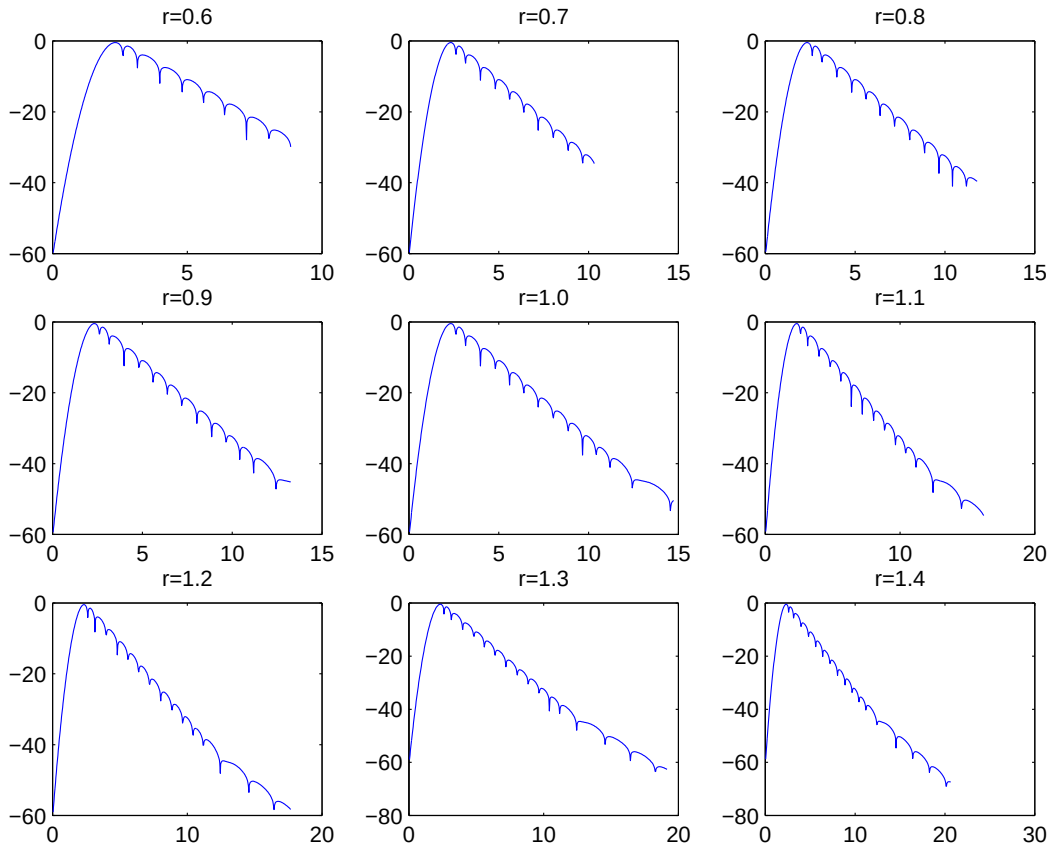


Abbildung 3.4 Logarithmus der L^2 -Norm der numerischen Lösung aus dem Galerkinschema aufgetragen gegen die Zeit, $h = 1/16$

3.3 Berechnung des singulären Integrals

In den hergeleiteten Algorithmen zur Approximation von Lösungen der retardierten Potentialintegralgleichung traten Integrale der Form

$$\int_T \frac{1}{|x - x_T|} ds_x$$

für ein Dreieck T mit Mittelpunkt x_T auf. Diese können entweder analytisch oder numerisch berechnet werden.

3.3.1 Analytische Berechnung

Der Einfachheit halber wird das oben definierte Dreieck T_{ref} betrachtet. Dieses kann so verschoben werden, daß der Mittelpunkt $x_{T_{ref}}$ gleich dem Ursprung ist. Das Dreieck wird dann in sechs Teildreiecke wie in Abbildung 3.7 zerlegt. Es ist dann

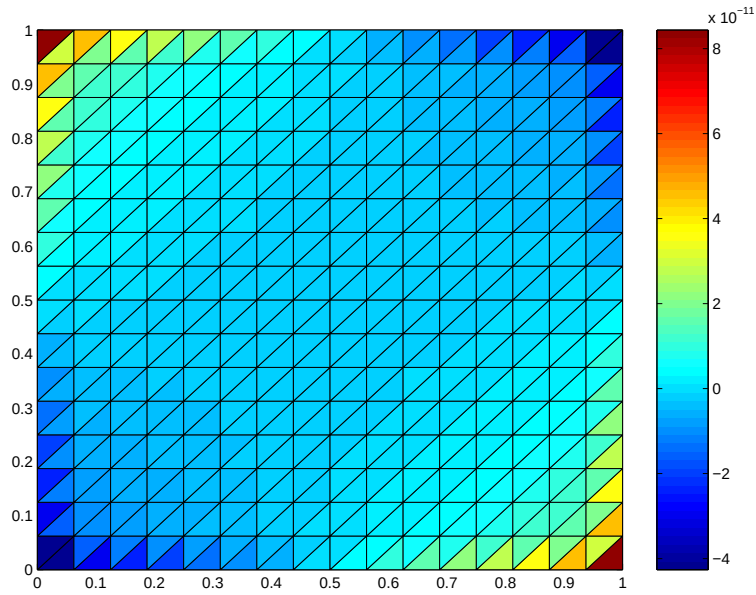


Abbildung 3.5 Stabile Lösung des Galerkinschemas nach 500 Zeitschritten für das Netzverhältnis $r = 0.6$, $h = 1/16$

$$\begin{aligned}
\int_{T_{ref}} \frac{1}{|x - x_{T_{ref}}|} dx &= \left(\int_{T_I + T_{II} + T_{III} + T_{IV} + T_{IV'} + T_{III'}} \frac{1}{|x|} dx \right) \\
&= 2 \left(\int_0^{\pi/4} \int_0^{\frac{1}{3 \cos \phi}} \frac{1}{r} r dr d\phi + \int_0^{\arccos(1/\sqrt{5})} \int_0^{\frac{1}{3 \cos \phi}} \frac{1}{r} r dr d\phi + \int_0^{3\pi/4 - \arccos(1/\sqrt{5})} \int_0^{\frac{1}{3\sqrt{2} \cos \phi}} \frac{1}{r} r dr d\phi \right) \\
&= 2 \left(\int_0^{\pi/4} \frac{1}{3 \cos \phi} d\phi + \int_0^{\arccos(1/\sqrt{5})} \frac{1}{3 \cos \phi} d\phi + \int_0^{3\pi/4 - \arccos(1/\sqrt{5})} \frac{1}{3\sqrt{2} \cos \phi} d\phi \right) \\
&= \frac{2}{3} \left(\left[\ln \left| \tan \frac{\pi}{2} + \frac{\phi}{2} \right| \right]_0^{\pi/4} + \left[\ln \left| \tan \frac{\pi}{2} + \frac{\phi}{2} \right| \right]_0^{\arccos(1/\sqrt{5})} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\ln \left| \tan \frac{\pi}{2} + \frac{\phi}{2} \right| \right]_0^{3\pi/4 - \arccos(1/\sqrt{5})} \right) \\
&= \frac{2}{3} \left(\ln \left| \frac{1 + \tan \alpha/2}{1 - \tan \alpha/2} \right| + \ln \left| \frac{1 + \tan \beta/2}{1 - \tan \beta/2} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 + \tan \gamma/2}{1 - \tan \gamma/2} \right| \right) = 2.4072,
\end{aligned}$$

wobei $\alpha = \pi/4$, $\beta = \arccos(1/\sqrt{5})$ und $\gamma = 3\pi/4 - \arccos(1/\sqrt{5})$ ist. Haben die beiden Seiten am rechten Winkel des Dreiecks die Länge h , so ergibt eine Anwendung der Transformationsformel den Wert $2.4072h$.

3.3.2 Quadraturformeln für singuläre Integrale

Zur Motivation der Quadraturformeln sei f eine integrierbare Funktion auf dem Dreieck $T_{ref,2} := \text{conv} \{(0,0), (1,0), (1,1)\}$. Dann ergibt die Variablentransformation $y = xs$ (vergleiche [Duf])

$$\begin{aligned}
\int_{T_{ref,2}} f(x,y) d(x,y) &= \int_0^1 \int_0^x f(x,y) dy dx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 f(x, xs) x ds dx.
\end{aligned}$$

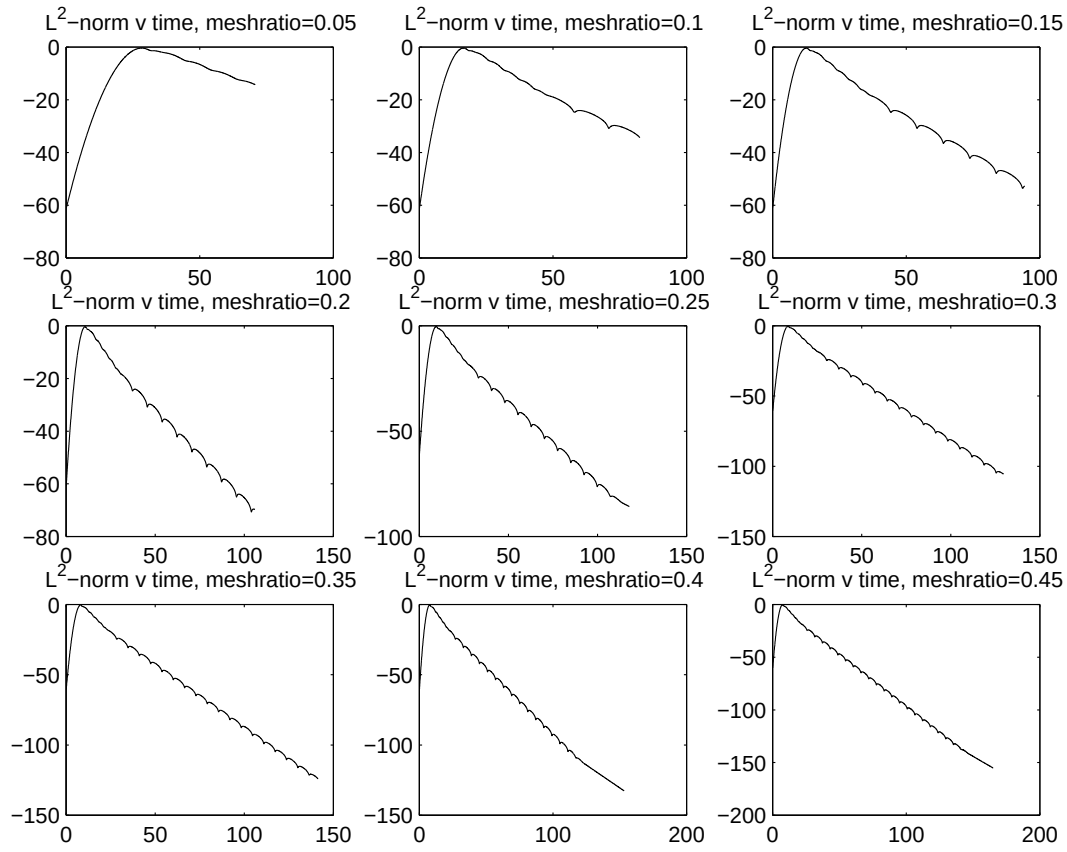


Abbildung 3.6 Logarithmus der L^2 -Norm der numerischen Lösung aus dem Galerkinschema für kleine Netzverhältnisse r und $h = 1/16$

Hat der Integrand f eine Singularität am Ursprung und ist $f(x, y) = g(x, y) \cdot (x^2 + y^2)^{(-\alpha/2)}$ für eine beschränkte Funktion $g \in L^\infty(\overline{T_{ref,2}})$ und eine positive Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist

$$f(x, xs)x = g(x, xs)x^{1-\alpha}(1+s^2)^{-\alpha/2},$$

d.h. die Funktion $(x, s) \mapsto f(x, xs)x$ ist beschränkt auf $\overline{T_{ref,2}}$. Damit kann eine beliebige Quadraturformel für das Einheitsquadrat auf das Integral mit dem Integranden $f(x, xs)x$ angewendet werden und ergibt eine zum Ursprung gewichtete Formel für $T_{ref,2}$. Die nachstehende Tabelle 3.1 zeigt, wie die Mittelpunktregel und eine Gaußsche Vierpunktregel transformiert werden.

Zur Berechnung eines Integrals, dessen Integrand eine Singularität am Mittelpunkt des Dreiecks hat, wie zum Beispiel

$$\int_{T_{ref}} \frac{1}{|x - x_{T_{ref}}|} ds_x,$$

wird das Dreieck T_{ref} in drei Teildreiecke wie in Abbildung 3.8 zerlegt. Für jedes dieser Teildreiecke ist der Integrand singulär an einem Eckpunkt. Mit affin-linearen Transformation lassen sich diese Dreiecke auf $T_{ref,2}$ abbilden, so daß die Singularität am Ursprung ist. Auf diese Weise lassen sich Quadraturformeln beliebiger Ordnung zur Integration singulärer Funktionen auf Dreiecken definieren. Die affin-linearen Abbildungen sind für den Fall, daß die Singularität am Mittelpunkt ist

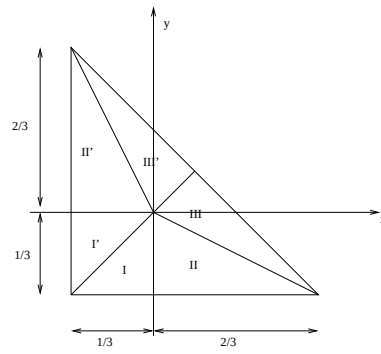


Abbildung 3.7 Zerlegung des Dreiecks

Regel	Quadraturpunkte und -gewichte auf $[0, 1]^2$	Transformierte Punkte und Gewichte auf $T_{ref,2}$
Mittelpunktregel	$\xi = (1/2, 1/2)$ $\omega = 1$	$\eta = (1/2, 1/4)$ $\theta = 1/2$
Gaußsche 4-Punkt-Formel	$\xi_1 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}})$ $\xi_2 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}})$ $\xi_3 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}})$ $\xi_4 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}})$ $\omega_i = 1/4$	$\eta_1 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}})$ $\eta_2 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{6})$ $\eta_3 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{6})$ $\eta_4 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}})$ $\theta_1 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}})$ $\theta_2 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}})$ $\theta_3 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}})$ $\theta_4 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}})$

Tabelle 3.1 Transformierte Quadraturformeln

gegeben durch

$$\Phi_I : T_{ref,2} \rightarrow T_I, \quad (\xi_1, \xi_2) \mapsto ((1 - \xi_1)/3 + \xi_2, (1 - \xi_1)/3)$$

$$\Phi_{II} : T_{ref,2} \rightarrow T_{II}, \quad (\xi_1, \xi_2) \mapsto ((1 - \xi_1)/3 + (\xi_1 - \xi_2), (1 - \xi_1)/3 + \xi_2)$$

$$\Phi_{III} : T_{ref,2} \rightarrow T_{III}, \quad (\xi_1, \xi_2) \mapsto ((1 - \xi_1)/3, (\xi_1 - \xi_2)).$$

Die Mittelpunktregel gibt die drei Quadraturpunkte $(\frac{5}{12}, \frac{2}{12})$, $(\frac{5}{12}, \frac{5}{12})$ und $(\frac{2}{12}, \frac{5}{12})$ mit Gewichten $\frac{1}{6}$, d.h.

$$\int_{T_{ref}} f(x) dx \approx \frac{1}{6} \left(f\left(\frac{5}{12}, \frac{2}{12}\right) + f\left(\frac{5}{12}, \frac{5}{12}\right) + f\left(\frac{2}{12}, \frac{5}{12}\right) \right),$$

während sich für die 4-Punkt-Regel auf $[0, 1]^2$ die in Tabelle 3.2 gezeigten zwölf Punkte ergeben.

Anwenden dieser und einer aus einer 9-Punkt Quadraturformel resultierenden 27-Punkt-Regel auf das Integral $\int_{T_{ref}} \frac{1}{|x_{T_{ref}} - x|} ds_x$ ergibt die folgenden Werte im Vergleich zu Berechnung mit einer nichttransformierten 73 Punkte Quadratur und der analytischen Bestimmung

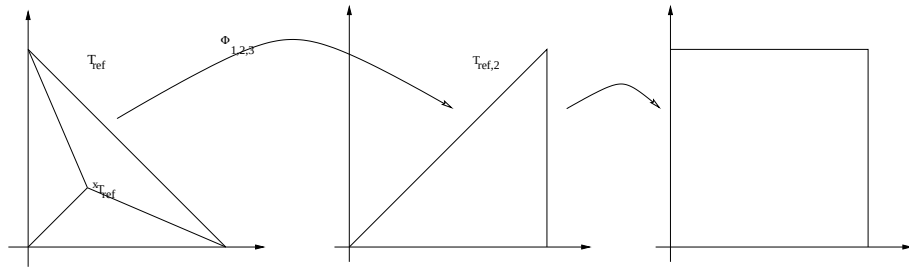


Abbildung 3.8 Zerlegung des Dreiecks und Transformation auf das Einheitsquadrat

i	1	2	3	4	5	6
ξ_i^1	$\frac{1}{2} - \frac{1}{3\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3} - \frac{1}{6\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{3}}$
ξ_i^2	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6\sqrt{3}}$	$\frac{1}{6} - \frac{1}{6\sqrt{3}}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6\sqrt{3}}$	$\frac{1}{6} - \frac{1}{6\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{3\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3} - \frac{1}{6\sqrt{3}}$
ω_i	$\frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$	$\frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$	$\frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$	$\frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$	$\frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$	$\frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$
i	7	8	9	10	11	12
ξ_i^1	$\frac{1}{2} - \frac{1}{3\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3} - \frac{1}{6\sqrt{3}}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6\sqrt{3}}$	$\frac{1}{6} - \frac{1}{6\sqrt{3}}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6\sqrt{3}}$	$\frac{1}{6} - \frac{1}{6\sqrt{3}}$
ξ_i^2	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{3\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3} - \frac{1}{6\sqrt{3}}$
ω_i	$\frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$	$\frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$	$\frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$	$\frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$	$\frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$	$\frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$

Tabelle 3.2 Transformierte Vierpunktregel bei Unterteilung eines Dreiecks in drei Teildreiecke

3.4 Numerische Stabilität

Der Satz 2.6.2 garantiert die Stabilität der Galerkin-Verfahren, sofern die diskrete Formulierung exakt behandelt wird. Probleme in der Diskretisierung der retardierten Potentialintegralgleichung wurden in den vorigen Abschnitten illustriert und die numerischen Beispiele zeigten, daß die Stabilität der Verfahren stark von den Approximationen abhängt. Um ein Stabilitätskriterium für die diskretisierten Schemen zu erhalten, wird die Integralgleichung auf einer unendlich großen flachen Platte, die mit halbierten Quadraten der Seitenlänge h wie in Abbildung 3.9 trianguliert wird, betrachtet. Die Verfahren resultierend aus der Kollokationsmethode aus Abschnitt 3.1 und der Galerkinmethode aus Abschnitt 3.2 angewandt auf $P = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ werden in Shift-Operatoren geschrieben. Diese Form der Algorithmen erlaubt es, Amplifikationsfaktoren zu berechnen, die numerische Stabilität indizieren. Es scheint naheliegend, daß ein Schema, welches stabil ist auf der unendlichen Platte auch stabil ist im Falle beschränkter Gebiete. Im speziellen kann jedoch die Geometrie der betrachteten Oberfläche gewisse Auslöschungseigenschaften verursachen, die für ein scheinbar instabiles Schema stabile Ergebnisse liefern.

Anzahl der Quadraturpunkte	3 Punkte	12 Punkte	27 Punkte	analytisch
$\int_{T_{ref}} 1/ x - x_T ds_x$	3.20306	2.23686	2.48385	2.4072

Tabelle 3.3 Resultate für verschiedene Quadraturformeln

In den folgenden Abschnitten werden allgemein Algorithmen betrachtet, die sich in der Form

$$Q^0 U^n = b^n - \sum_{m=0}^{n-1} Q^{n-m} U^m \quad (3.5)$$

schreiben lassen. Solche Konvolutionssummen treten beispielsweise auch in der Elastodynamik auf (vergl. [PeSi]). Dabei wird L^p -Stabilität wie folgt definiert.

Definition 3.4.1. Ein Schema der Form (3.5) heißt L^p -stabil für $1 \leq p \leq \infty$, wenn es von n , h und Δt unabhängige Konstanten A und C gibt, so daß für eine beliebige Anfangsfunktion U^0 die Lösung von (3.5) der folgenden Abschätzung genügt

$$\|U^n\|_p \leq C e^{At} \|U^0\|_p, \quad (3.6)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $t = n \Delta t$.

Bemerkung 3.4.1. Diese Definition der Stabilität unterscheidet sich von der in Theorem 2.6.2. Für eine geeignete Wahl von σ und eine diskrete Lösung U die das Kriterium (3.6) mit $p = 2$ erfüllt, gilt jedoch $|U|_{\sigma,0,L^2(\Gamma)} \leq C$.

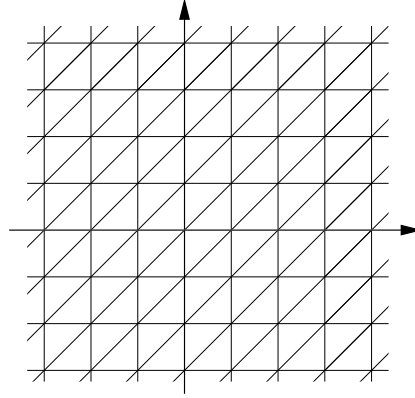


Abbildung 3.9 Triangulierung von $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ mittels halbierter Quadrate

3.4.1 Notationen und Definitionen

Es bezeichne $\mathcal{T}$ die uniforme Triangulierung des Gebietes $\Gamma := \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ mit Dreiecken der Seitenlänge h wie in Abbildung 3.9. Eine Funktion $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, die konstant ist auf jedem Dreieck $T \in \mathcal{T}$ wird mit einer diskreten Funktion $f^* : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ identifiziert, die definiert ist durch

$$f_{n,m}^* = (\alpha, \beta), \quad \text{falls} \quad f|_{T_{n,m}^{upper}} = \alpha \quad \text{und} \quad f|_{T_{n,m}^{lower}} = \beta,$$

wobei

$$\begin{aligned} T_{n,m}^{upper} &= \text{conv} \{(nh, mh), ((n+1)h, mh), ((n+1)h, (m+1)h)\} \quad \text{und} \\ T_{n,m}^{lower} &= \text{conv} \{(nh, mh), ((n+1)h, (m+1)h), (nh, (m+1)h)\}. \end{aligned}$$

Eine diskrete Funktion f gehört zu $L^2(\mathcal{T})$, falls

$$\|f\|_{L^2(\mathcal{T})}^2 := h^2 \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} |f_{n,m}|^2 < \infty,$$

und zu $L^1(\mathcal{T})$, falls

$$\|f\|_{L^1(\mathcal{T})} := h^2 \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} |f_{n,m}| < \infty.$$

Die *diskrete Fourier-transformierte* $\tilde{f}$ einer Funktion $f \in L^2(\mathcal{T}) \cap L^1(\mathcal{T})$ ist definiert als

$$\tilde{f}(\omega) = h^2 \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} e^{-i\omega \cdot (n,m)h} f_{n,m}, \quad \omega \in [0, 2\pi/h]^2$$

und kann allgemeiner für Funktionen $f \in L^2(\mathcal{T})$ definiert werden. Wie in der kontinuierlichen Situation definiert die diskrete Fouriertransformation einen isometrischen Isomorphismus von $L^2(\mathcal{T})$ nach $L^2([0, 2\pi/h]^2)$.

Die Shift-Operatoren S_x und S_y sind auf $L^2(\mathcal{T})$ definiert durch

$$(S_x f)_{n,m} = f_{n-1,m}, \quad (S_y f)_{n,m} = f_{n,m-1}$$

und gehen unter der Transformation über in Multiplikationsoperatoren

$$\begin{aligned} (S_x^j S_y^k f) \sim (\omega) &= h^2 \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} e^{-i\omega \cdot (n,m)h} (S_x^j S_y^k f)_{n,m} \\ &= h^2 \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} e^{-i\omega \cdot (n,m)h} f_{n-j,m-k} \\ &= h^2 \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} e^{-i\omega \cdot ((n-j)+j, (m-k)+k)h} f_{n-j,m-k} \\ &= h^2 \sum_{(r,s) \in \mathbb{Z}^2} e^{-i\omega \cdot (r+j, s+k)h} f_{r,s} \\ &= e^{-i\omega \cdot (j,k)h} h^2 \sum_{(r,s) \in \mathbb{Z}^2} e^{-i\omega \cdot (r,s)h} f_{r,s} \\ &= e^{-i\omega \cdot (j,k)h} \tilde{f}(\omega), \quad (j,k) \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

3.4.2 Algorithmen in Shift-Operator Notation

Wie im Falle beschränkter Oberflächen führt die Diskretisierung der retardierten Potentialintegralgleichung auf der Oberfläche $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ mittels der Kollokationsmethode auf ein Schema der

Form

$$\begin{aligned}
& C_{T_{j,k}^{lower}, T_{j,k}^{lower}} U_{T_{j,k}^{lower}}^n = g(x_{T_{j,k}^{lower}}, t^n) \\
& - \sum_{\substack{(l,m) \in \mathbb{Z}^2 \\ (l,m) \neq (j,k)}} C_{T_{l,m}^{lower}, T_{j,k}^{lower}} \left((1 - \epsilon_{T_{l,m}^{lower}, T_{j,k}^{lower}}) U_{T_{l,m}^{lower}}^{n-m_{T_{l,m}^{lower}, T_{j,k}^{lower}}} + \epsilon_{T_{l,m}^{lower}, T_{j,k}^{lower}} U_{T_{l,m}^{lower}}^{n-m_{T_{l,m}^{lower}, T_{j,k}^{lower}}-1} \right) \\
& - \sum_{(l,m) \in \mathbb{Z}^2} C_{T_{l,m}^{upper}, T_{j,k}^{lower}} \left((1 - \epsilon_{T_{l,m}^{upper}, T_{j,k}^{lower}}) U_{T_{l,m}^{upper}}^{n-m_{T_{l,m}^{upper}, T_{j,k}^{lower}}} + \epsilon_{T_{l,m}^{upper}, T_{j,k}^{lower}} U_{T_{l,m}^{upper}}^{n-m_{T_{l,m}^{upper}, T_{j,k}^{lower}}-1} \right),
\end{aligned}$$

für untere Dreiecke und

$$\begin{aligned}
& C_{T_{j,k}^{upper}, T_{j,k}^{upper}} U_{T_{j,k}^{upper}}^n = g(x_{T_{j,k}^{upper}}, t^n) \\
& - \sum_{(l,m) \in \mathbb{Z}^2} C_{T_{l,m}^{lower}, T_{j,k}^{upper}} \left((1 - \epsilon_{T_{l,m}^{lower}, T_{j,k}^{upper}}) U_{T_{l,m}^{lower}}^{n-m_{T_{l,m}^{lower}, T_{j,k}^{upper}}} + \epsilon_{T_{l,m}^{lower}, T_{j,k}^{upper}} U_{T_{l,m}^{lower}}^{n-m_{T_{l,m}^{lower}, T_{j,k}^{upper}}-1} \right) \\
& - \sum_{\substack{(l,m) \in \mathbb{Z}^2 \\ (l,m) \neq (j,k)}} C_{T_{l,m}^{upper}, T_{j,k}^{upper}} \left((1 - \epsilon_{T_{l,m}^{upper}, T_{j,k}^{upper}}) U_{T_{l,m}^{upper}}^{n-m_{T_{l,m}^{upper}, T_{j,k}^{upper}}} + \epsilon_{T_{l,m}^{upper}, T_{j,k}^{upper}} U_{T_{l,m}^{upper}}^{n-m_{T_{l,m}^{upper}, T_{j,k}^{upper}}-1} \right)
\end{aligned}$$

für obere Dreiecke. Es sei $U_{j,k}^n = (U_{T_{j,k}^{lower}}^n, U_{T_{j,k}^{upper}}^n)$, dann können die Gleichungen geschrieben werden als

$$Q^0 U_{j,k}^n = g^n - \sum_{m=1}^n Q^m U_{j,k}^{n-m}, \quad (3.7)$$

wobei die Operatoren Q^m 2×2 -Matrizen sind deren Einträge rationale Polynome in den Shift-Operatoren S_x und S_y sind. Diese Polynome sind unabhängig von dem betrachteten Lösungspaar $U_{j,k}^n$. Im Gegensatz zur bisherigen Vorgehensweise, in der homogene Anfangsbedingungen und nichthomogene Randbedingungen gestellt wurden, wird hier $g \equiv 0$ gesetzt, dafür aber $U^0 \neq 0$ angenommen, um nicht die triviale Lösung $U \equiv 0$ zu erhalten. Diese Modifizierung dient dazu, den numerischen Stabilitätstest unabhängig von der rechten Seite g zu machen.

Die Matrizen Q^j können folgendermaßen berechnet werden. O.B.d.A. sei $(j, k) = (0, 0)$ und $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$ beliebig. In der Berechnung von $U_{j,k}^n$ wird die erste Komponente der von der Zeit abhängigen Funktion $U_{r,s}$ zu einem früheren Zeitpunkt benötigt. Dies liefert den Beitrag

$$\begin{aligned}
& (1 - \epsilon_{T_{r,s}^{upper}, T_{0,0}^{upper}}) C_{T_{r,s}^{upper}, T_{0,0}^{upper}} S_x^r S_y^s \quad \text{zu} \quad Q^{m_{T_{r,s}^{upper}, T_{0,0}^{upper}}} (1, 1) \text{ und} \\
& \epsilon_{T_{r,s}^{upper}, T_{0,0}^{upper}} C_{T_{r,s}^{upper}, T_{0,0}^{upper}} S_x^r S_y^s \quad \text{zu} \quad Q^{m_{T_{r,s}^{upper}, T_{0,0}^{upper}}+1} (1, 1),
\end{aligned}$$

wobei die Konstanten $\epsilon_{T_{r,s}^{upper}, T_{0,0}^{upper}}$, $m_{T_{r,s}^{upper}, T_{0,0}^{upper}}$ und $\epsilon_{T_{r,s}^{lower}, T_{0,0}^{upper}}$ genau wie in Abschnitt 3.1 definiert sind. Der Einfluß der zweiten Komponente von $U_{r,s}^j$ ergibt sich analog und verursacht einen Beitrag zu den Matrixeinträgen

$$Q^{m_{T_{r,s}^{lower}, T_{0,0}^{upper}}} (1, 2) \text{ und } Q^{m_{T_{r,s}^{lower}, T_{0,0}^{upper}}+1} (1, 2).$$

Auf die gleiche Art werden die Komponente $Q^l(2, 1)$ und $Q^l(2, 2)$ errechnet.

3.4.3 Fourier–transformierter Algorithmus und L^2 –Stabilität

Die diskrete Fourier–Transformation überführt das Schema (3.5), das sich umschreiben läßt zu

$$\mathcal{Q}^0 U_{j,k}^n = \sum_{m=1}^n \mathcal{Q}^m U_{j,k}^{n-m} = \sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{Q}^{n-m} U_{j,k}^m \quad ((j, k) \in \mathbb{Z}^2)$$

in die Gleichung

$$q_0 \tilde{U}^n = \sum_{m=0}^{n-1} q_{n-m} \tilde{U}^m, \quad (3.8)$$

wobei $q_j = Q^j(e^{-i\omega_1 h}, e^{-i\omega_2 h})$, sofern $\mathcal{Q}^j = Q^j(S_x, S_y)$ für eine Abbildung Q^j von den Shift–Operatoren in ein Quadrupel von rationalen Polynomen.

Es sei

$$p_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p_n := -q_0^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} q_{n-m} p_m \quad \text{für} \quad n \geq 1. \quad (3.9)$$

Dann kann Gleichung (3.8) geschrieben werden als

$$\tilde{U}^n = p_n \tilde{U}^0.$$

In dieser Form läßt sich die Stabilität der Verfahren einfach untersuchen. In [Da2] findet sich das folgende Kriterium.

Satz 3.4.1. Das Schema (3.5) ist L^2 –stabil, wenn es eine positive Konstante C gibt so, daß für die Koeffizienten p_n aus (3.9) gilt

$$\|p_n\|_\infty \leq C \quad (n \in \mathbb{N}), \quad (3.10)$$

wobei für eine Matrix–Norm $|\cdot|_{2 \times 2}$

$$\|p_n\|_\infty = \sup\{|p_n(\omega)|_{2 \times 2}; \omega \in [0, 2\pi/h]^2\}.$$

Beweis. Unter Benutzung der Parsevalschen Identität folgt

$$\begin{aligned} \|U^n\|_{L^2(\mathcal{T})}^2 &= \|\tilde{U}^n\|_{L^2([0, 2\pi/h]^2)}^2 = \|p_n \tilde{U}^0\|_{L^2([0, 2\pi/h]^2)}^2 \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi/h} \int_0^{2\pi/h} |p_n(\omega)|_{2 \times 2}^2 |\tilde{U}^0(\omega)|^2 d\omega \\ &\leq \frac{\|p_n\|_\infty}{4\pi^2} \int_0^{2\pi/h} \int_0^{2\pi/h} |\tilde{U}^0(\omega)|_{L^2([0, 2\pi/h]^2)}^2 d\omega \\ &= \|p_n\|_\infty \|\tilde{U}^0\|_{L^2([0, 2\pi/h]^2)}^2 = \|p_n\|_\infty \|U^0\|_{L^2(\mathcal{T})}^2 \leq C \|U^0\|_{L^2(\mathcal{T})}^2, \end{aligned}$$

womit die Stabilitätsbedingung (3.6) erfüllt ist. □

Bemerkung 3.4.2. Dieser Satz liefert ein Stabilitätskriterium, daß nur von der Zeitschrittweite Δt abhängt, denn die Netzweite h hebt sich sowohl in den Koeffizienten $C_{T, T'}$ als auch in den Exponenten der Ausdrücke $e^{-i\omega h}$ auf.

Umgekehrt läßt sich sagen, wann das Schema für die unendlich große Platte instabil ist.

Satz 3.4.2. Existiert ein offenes Intervall $I \subset [0, 2\pi/h]^2$ so, daß für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|p_n(\omega)|_{2 \times 2} \geq c_n \quad (\omega \in I) \quad (3.11)$$

für eine Folge (c_n) die gegen unendlich konvergiert, d.h. für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $c_n \geq k$ für alle $n \geq n_0$, so ist das Schema für die unendlich große Platte instabil.

Beweis. Um die Aussage zu zeigen, sei als Anfangsdatum U^0 folgendermaßen gewählt

$$U_{j,k}^0 = \delta_{j,0} \delta_{k,0} (1, 1).$$

Dann gilt $\tilde{U}^0(\omega) = h^2$ für alle $\omega \in [0, 2\pi/h]^2$, $\|U^0\|_2 = h$ und somit folgt wie im obigen Beweis

$$\begin{aligned} \frac{\|U^n\|_2^2}{\|U^0\|_2^2} &= \frac{1}{h^2 4\pi^2} \int_0^{2\pi/h} \int_0^{2\pi/h} |p_n(\omega)|_{2 \times 2}^2 d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |p_n(\omega)|_{2 \times 2}^2 d\omega \\ &\geq \frac{|I|}{4\pi^2} c_n^2, \end{aligned}$$

wobei $|I|$ das Maß des Intervalls I bezeichnet. Wird nun ein Zeitpunkt t_0 fest gewählt, und ist $\Delta t_n := t_0/n$, so folgt $\|U(\cdot, t_0)\|_2 \rightarrow \infty$, also kann (3.6) nicht erfüllt sein. $\square$

3.4.4 L^∞ -Stabilität

Die L^2 -Stabilität eignet sich vor allem für große, flache Platten. Für beschränkte Oberflächen eignet sich auch der Begriff der L^∞ -Stabilität. Die L^∞ -Stabilität von Schemata der Form (3.5) wurde von Rynne in [Ry3] untersucht. Dort wird das folgende hinreichende Kriterium angegeben.

Satz 3.4.3. Für ein Schema der Form (3.5) sei

$$a_m = \rho((Q^0)^{-1} Q^m),$$

wobei ρ den Spektralradius einer Matrix bezeichne. Dann ist das Schema L^∞ -stabil, falls die rekursiv definierte Folge

$$b_0 = 1, \quad b_n = \sum_{m=1}^n a_m b_{n-m}, \quad n \geq 1, \quad (3.12)$$

beschränkt ist. In diesem Fall gilt $\|u^n\|_\infty \leq b_n \|u^0\|_\infty$.

Beweis. Siehe [Ry3]. $\square$

Dieses Stabilitätskriterium ist sehr einfach zu überprüfen, Davies berichtet in [Da3] jedoch, daß es Algorithmen gibt, die L^∞ -stabil sind, das Kriterium jedoch nicht erfüllen.

3.4.5 Numerische Ergebnisse der Stabilitätstests

L^2 –Stabilität. Abbildung 3.10 zeigt wie die Amplifikationsfaktoren p_n^D der Kollokationsmethode exponentiell mit n wachsen bei einer Frequenz $\omega = (0, \pi/2h)$, während die Faktoren p_n^G des Galerkinschemas beschränkt bleiben. In Abbildung 3.11 zeigt der Graph von p_{100}^D als Funktion von ω , welche Frequenzen für die Instabilität verantwortlich sind. Diese sind für Netzverhältnisse $r = 0.6$ und $r = 1.2$ nahezu dieselben, nämlich die Frequenzen bei denen eine Komponente nahe 0 oder nahe 2π ist.

Die Graphen der Maximumnorm $\|p_n^G\|_{\infty, [0, 2\pi/h]^2}$ in Abbildung 3.12 lassen vermuten, daß das Galerkinschema stabil ist für alle Netzverhältnisse.

Der numerische Stabilitätstest wird bestätigt durch die verschiedenen Beispiele für das nichthomogene Problem aus den vorigen Abschnitten.

L^∞ –Stabilität. Da sich die Kollokationsmethode in den Beispielen als extrem instabil erwies wird für die L^∞ –Stabilität nur das Galerkin–Schema auf dem Einheitsquadrat untersucht. Gemäß der Diskretisierung aus Abschnitt 3.2 ergeben sich die Matrizen Q^m und mit Satz 3.4.3 die Koeffizienten $a_m = \rho((Q^0)^{-1}Q^m)$. Die mittels (3.12) definierte Folge ist in Abbildung 3.13 für verschiedene Netzverhältnisse gezeigt. Die Folge wächst exponentiell, was die Beobachtung von Davies bestätigt.

Z–Stabilität. Ein anderer Stabilitätstest für Algorithmen der betrachteten Form können aus der Z–Transformation hergeleitet werden (vergleiche [PeSi]). Dieser Stabilitätstest scheint jedoch zu stark zu sein und war nicht in Übereinstimmung mit den Beispielen aus den Abschnitten 3.1 und 3.2.

3.5 Diskussion des numerischen Aufwands

3.5.1 Numerische Kosten

Um den hohen numerischen Aufwand der vorgestellten Algorithmen zu illustrieren, wird das Verhalten der Rechenzeit bei Halbierung der Zeitschritt– und der Netzweite betrachtet. Die Lösung wird in jedem Fall bis zu einem fixierten Zeitpunkt $t_0 = 23.6$ berechnet. Es wird der stabile Algorithmus aus Abschnitt 3.1 bei einem konstanten Netzverhältnis $r = 1.0$ verwendet. Die Assemblierung der Matrizen Q^m erfolgt dabei in der Programmiersprache C. Das Zeitschrittverfahren wird in MATLAB durchgeführt, wobei eine LU–Zerlegung der zu invertierenden Matrix Q^0 abgespeichert wird.

Abbildung 3.14 zeigt, daß sich der zeitliche Aufwand wie $O(N^3)$ verhält, wenn N die Anzahl der Freiheitsgrade bezeichnet.

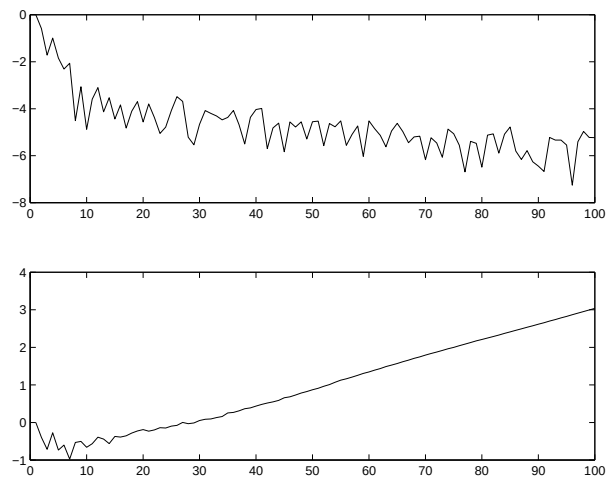


Abbildung 3.10 Vergleich der Amplifikationsfaktoren p_n^G und p_n^D bei einer Frequenz $\omega = (0, \pi/(2h))$ für $r = 1.2$

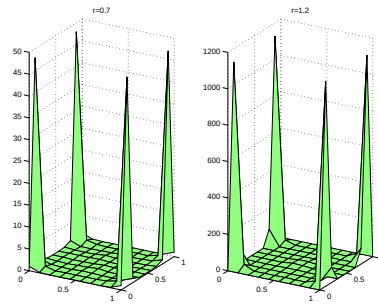


Abbildung 3.11 Amplifikationsfaktoren aufgetragen gegen die Frequenz für $r = 0.7$ und $n = 80$ (links) und $n = 50$ mit $r = 1.2$ (rechts)

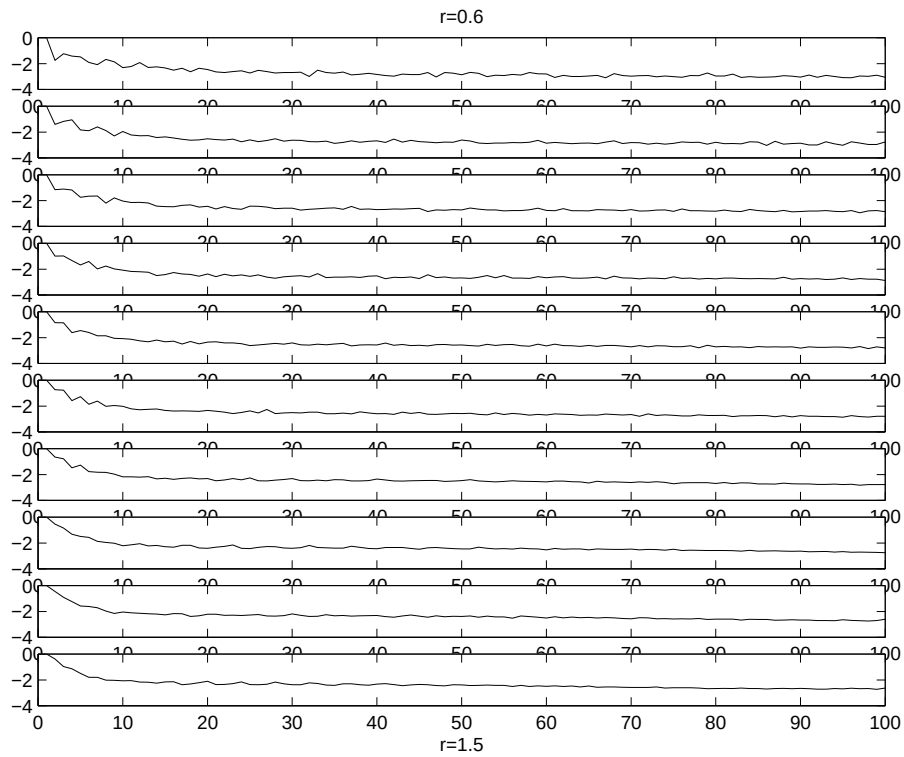


Abbildung 3.12 Logarithmus der $\|p_n^G\|_\infty$, $n \in [1, 100]$

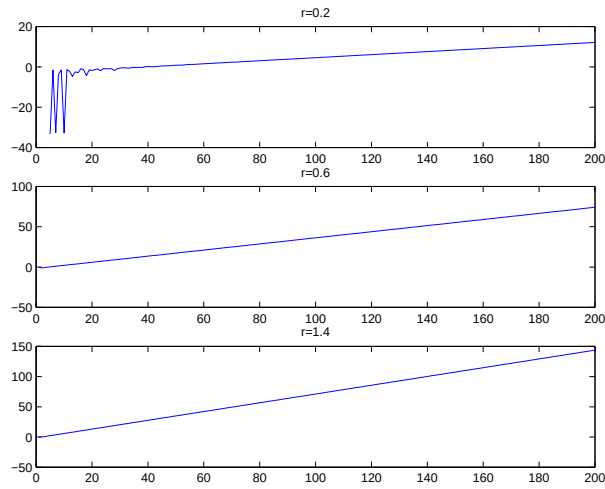


Abbildung 3.13 Logarithmus von $|b_n^G|$, $n \in [1, 200]$, bei verschiedenen Netzverhältnissen r

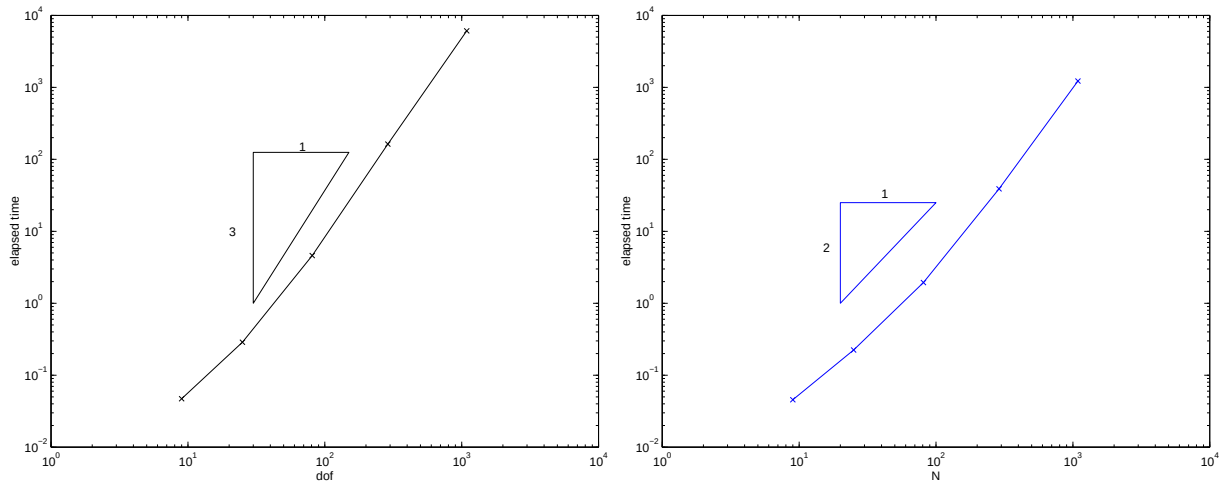


Abbildung 3.14 Rechenzeit in Sekunden aufgetragen gegen die Anzahl der Freiheitsgrade für den Standard-Algorithmus (links) und das Schema aus Abschnitt 3.5.2 (rechts)

3.5.2 Ein numerisch günstigerer Algorithmus

Die Kollokationsmethode aus Abschnitt 3.1 resultiert aus einem Galerkinschema, wenn die Integrale über die Dreiecke mit Mittelpunktregeleln ausgewertet werden. Wie sich in den Beispielen und in der numerischen Stabilitätsanalyse zeigte, ist der resultierende Algorithmus extrem instabil. Einziger Vorteil im Vergleich zum vorgestellten Galerkinverfahren in Abschnitt 3.2 sind die wesentlich niedrigeren numerischen Kosten. Im Schema mit der Gaußschen Dreipunktquadratur werden etwa neunmal soviele Rechenoperationen benötigt, wie bei der Kollokationsmethode. Die Frage die sich stellt ist, ob es wirklich notwendig ist, alle auftretenden Integrale mit der aufwendigeren Dreipunktquadratur zu behandeln. Da die Koeffizienten $C_{T,T'}$ größer sind, wenn der Abstand zwischen T und T' klein ist, als wenn sie weit von einander entfernt sind, ist die Idee, die Integrale

$$\int_T \int_{T'} \frac{\partial_t c_T(\mathbf{y}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} ds_{\mathbf{y}} ds_{\mathbf{x}}$$

mit einer höheren Quadraturformel nur im ersten Fall, also falls $\text{dist}(T, T') < \kappa$ für einen fest gewählten Parameter κ , zu approximieren. Die Abbildung 3.14 zeigt, daß die Rechenzeit sich hier etwa wie $O(N^2)$ verhält.

Numerische Ergebnisse. Bei einem Netzverhältnis $r = 1$ ist der Parameter $\kappa = 2h$ ausreichend, um stabile Ergebnisse für das Beispiel mit $g(x, t) = \exp(-10(t - 2.5)^2)$ aus den obigen Abschnitten zu erreichen.

3.6 Andere Approximationen

3.6.1 Verwenden einer Quadraturformel für das singuläre Integral

Die Behandlung des singulären Integrals in den bisher präsentierten Algorithmen erscheint nicht zufriedenstellend. Anstatt das äußere Integral in dem Ausdruck

$$\int_T \int_T \frac{\partial_t c_T(t^n - |x - y|)}{|x - y|} ds_y ds_x$$

mit einer Mittelpunktregel zu approximieren und dann das innere Integral analytisch oder mit Hilfe einer Quadraturformel aus Abschnitt 3.3 zu berechnen, kann zunächst eine höhere Formel auf das äußere Integral angewendet werden. Anschließend müssen singuläre Integrale ausgewertet werden, bei denen die Singularität des Integranden nicht am Mittelpunkt des Dreiecks liegt. Werden die Dreiecke jedoch so in Teildreiecke zerlegt, daß die Singularität in jedem Teildreieck auf einer Ecke liegt, so führen die Ideen aus Abschnitt 3.3 auf Quadraturformeln für diese Fälle.

Beispielsweise kann das äußere Integral mit einer Gaußschen 73-Punkt-Regel approximiert werden und die resultierenden 73 singulären Integrale mit einer aus einer 9 Punkt-Quadratur für Quadrate resultierenden 27-Punkt-Quadratur für singuläre Integrale, d.h.

$$\begin{aligned} \int_T \int_T \frac{\partial_t c_T(t^n - |x - y|)}{|x - y|} ds_y ds_x &\approx \text{gram } \Phi_T \sum_{i=1}^{73} \omega_i \int_T \frac{\partial_t c_T(t^n - |\Phi_T(\xi_i) - y|)}{|\Phi_T(\xi_i) - y|} ds_y \\ &\approx (\text{gram } \Phi_T)^2 \sum_{i=1}^{73} \sum_{j=1}^{27} \omega_i \sigma_j \frac{\partial_t c_T(t^n - |\Phi_T(\xi_i) - \Phi_T(\eta_j)|)}{|\Phi_T(\xi_i) - \Phi_T(\eta_j)|}. \end{aligned}$$

Dabei sind (ξ_i, ω_i) die Gauß-Punkte und (η_j, σ_j) die Quadraturpunkte der Approximationsformel für singuläre Integrale auf dem Referenzelement T_{ref} .

Numerische Ergebnisse. Für das Beispiel aus Abschnitt 3.1 liefert diese Approximation instabile Lösungen, wie Abbildung 3.15 zeigt.

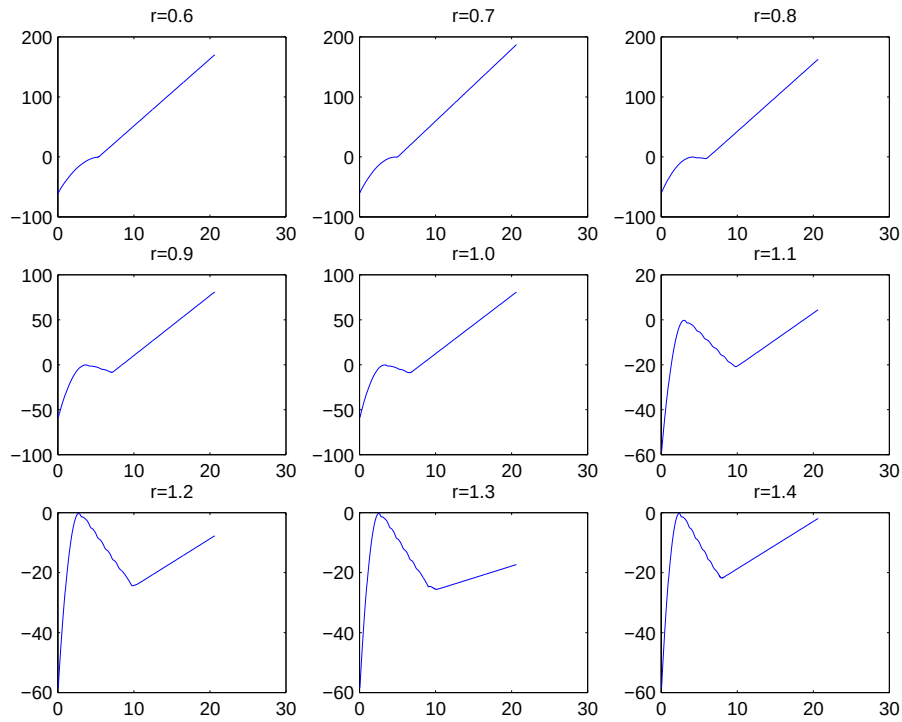


Abbildung 3.15 Logarithmen der Lösungen bei Anwendung einer Quadraturformel auf das singuläre Integral im Galerkinschema, $h = 1/16$

3.6.2 Einführung eines Glättungsschritts

Rynne führt Glättungsoperatoren ein (siehe [Ry1]), um Instabilitäten in Algorithmen für die retardierte Potentialintegralgleichung resultierend aus Kollokationsmethoden zu beseitigen. Diese Ideen wurden in [Ry2], [RySm] weiterverfolgt und sollen hier auf die aus den Galerkin-Schemata resultierenden Algorithmen angewendet werden.

Um die Glättungsformel zu beschreiben, sei angenommen, daß die numerische Lösung bis einschließlich des Zeitpunktes t^{n-1} berechnet wurde, d.h. daß alle Koeffizientenvektoren $U^1, \dots, U^{n-1}$ bekannt sind. Mithilfe der vorgestellten Algorithmen werden dann die beiden nächsten Vektoren U^n und U^{n+1} berechnet. Die Approximation zum Zeitpunkt $n\Delta t$ wird dann ersetzt durch den Mittelwert

$$U^n := \frac{1}{4} (U^{n-1} + 2U^n + U^{n+1}). \quad (3.13)$$

Der Vektor U^{n+1} wird gelöscht, bevor der beschriebene Prozeß mit n ersetzt durch $n+1$ wiederholt wird, um die Approximation U^{n+1} zu bestimmen. Lösungen, die sich verhalten wie $(-C)^n$, werden durch diesen Prozeß gedämpft, solche mit $C \sim 1$ werden stark gedämpft. Für in der Zeit stetig differenzierbare Funktionen führt der Mittelungsschritt auf einen Fehler der Ordnung $O(\Delta t)$.

Scheinbar erfordert die Berechnung der Lösung unter Verwendung dieses Mittelungsschritts den doppelten numerischen Aufwand im Vergleich zur direkten Berechnung. Dies ist jedoch nicht der Fall, wenn der Glättungsschritt in einer modifizierten Weise aufgeschrieben wird.

Es seien $U^1, \dots, U^{n-2}$ sowie die Hilfslösung $U^{n-1,**}$ bereits berechnet. Die Prozedur, die Lösung

zum Zeitpunkt t^{n-1} zu berechnen, lautet dann

$$\begin{aligned} U^{n,*} &= (Q^0)^{-1} \left(a^n - Q^1 U^{n-1,**} - \sum_{m=2}^{n-1} Q^m U^{n-m} \right), \\ U^{n-1} &= \frac{1}{4} (U^{n,*} + 2U^{n-1,**} + U^{n-2}), \\ U^{n,**} &= (Q^0)^{-1} \left(a^n - Q^1 U^{n-1} - \sum_{m=2}^{n-1} Q^m U^{n-m} \right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

wobei die mit Sternen markierten Vektoren $U^{n-1,*}$ und $U^{n-1,**}$ nur Hilfsvektoren sind, die nach der Berechnung von U^{n-1} nicht mehr benötigt werden.

Die Anzahl der arithmetischen Operationen in (3.14) läßt sich reduzieren so, daß die Anzahl derer im ursprünglichen Zeitschrittverfahren nur geringfügig vergrößert wird.

$$\begin{aligned} \sigma^n &= a^n - \sum_{m=2}^{n-1} Q^m U^{n-m}, \\ U^{n,*} &= (Q^0)^{-1} (\sigma^n - Q^1 U^{n-1,**}), \\ U^{n-1} &= \frac{1}{4} (U^{n,*} + 2U^{n-1,**} + U^{n-2}), \\ U^{n,**} &= (Q^0)^{-1} (\sigma^n - Q^1 U^{n-1}), \end{aligned} \quad (3.15)$$

wobei σ^n und die gesternten Vektoren wiederum temporäre Hilfsvektoren sind.

Numerische Ergebnisse. Abbildung 3.16 zeigt die Normen der stabilisierten Lösungen für die Behandlung des singulären Integrals mit einer Quadraturformel.

Stabilitätstest. Um die Stabilität des um den Glättungsschritt erweiterten Algorithmus zu analysieren, werden die Vektoren $V^n = (U^{n,**}, U^{n-1})$ und $b^n = ((Q^0)^{-1} a^n, 0)$ eingeführt. Der Algorithmus (3.15) läßt sich dann in der Form

$$R^0 V^n = b^n - \sum_{m=1}^{n-1} R^m V^{n-m}$$

schreiben, wobei die Matrizen R^l gegeben sind durch

$$R^0 = \begin{pmatrix} \text{Id} & (Q^0)^{-1} Q^1 \\ -\text{Id} & 4\text{Id} - (Q^0)^{-1} Q^1 \end{pmatrix}, \quad R^1 = \begin{pmatrix} 0 & (Q^0)^{-1} Q^2 \\ (Q^0)^{-1} Q^1 - 2\text{Id} & -\text{Id} \end{pmatrix}$$

und

$$R^l = \begin{pmatrix} 0 & (Q^0)^{-1} Q^{l+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind Id die Einheitsmatrix und 0 die Matrix mit Nulleinträgen, deren Dimensionen der der Matrizen Q^l entsprechen.

Eine Argumentation wie in Abschnitt 3.4 erlaubt dann die Einführung von Amplifikationsfaktoren, die Stabilität indizieren. Die Graphen in Abbildung 3.17 zeigen, wie die Frequenz $\omega = (0, \pi/h)$ durch die Glättung stabilisiert wird.

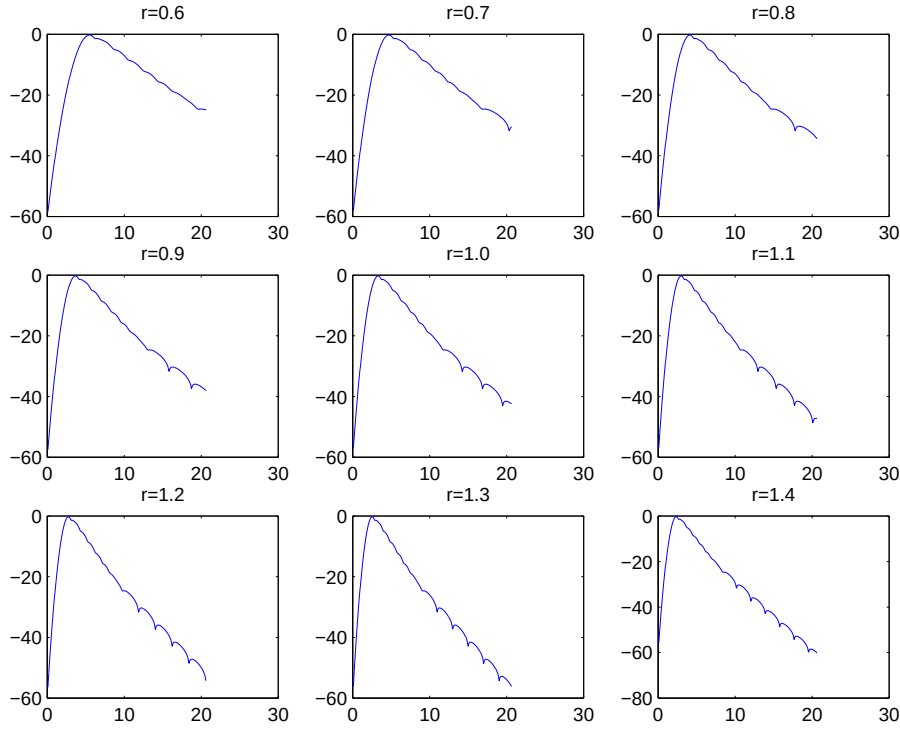


Abbildung 3.16 Logarithmen der geglätteten Lösungen bei Anwendung einer Quadraturformel auf das singuläre Integral im Galerkinschema, $h = 1/16$

3.6.3 Verbesserte Approximation des Zeitintegrals

Die Behandlung des Zeitintegrals in der Diskretisierung der Bilinearform (2.35) erscheint etwas unbefriedigend. Statt einer Einpunkt-Quadratur wird nun eine Zweipunktquadratur verwendet. Dazu sei wieder beispielhaft $a(\beta_{n-1}\phi_z, \beta_m\phi_{z'})$ betrachtet. Es ist

$$\begin{aligned}
 a(\beta_{n-1}\phi_z, \beta_m\phi_{z'}) &= \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \beta_{n-1}(t) \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{\beta'_m(t - |x - y|) \phi_{z'}(y) \phi_z(x)}{|x - y|} ds_y ds_x dt \\
 &\approx \frac{1}{2} (2\Delta t) e^{-2\sigma t^{n-1/2}} \beta_{n-1}(t^{n-1/2}) \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{\beta'_m(t^{n-1/2} - |x - y|) \phi_{z'}(y) \phi_z(x)}{|x - y|} ds_y ds_x \\
 &\quad + \frac{1}{2} (2\Delta t) e^{-2\sigma t^{n-3/2}} \beta_{n-1}(t^{n-3/2}) \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{\beta'_m(t^{n-3/2} - |x - y|) \phi_{z'}(y) \phi_z(x)}{|x - y|} ds_y ds_x \\
 &\approx \frac{\Delta t}{2} e^{-2\sigma t^n} \sum_{T \subset \omega_z} \sum_{T' \subset \omega_{z'}} 4|T||T'| \sum_{\alpha=1}^{N_{T,T'}} \sum_{\beta=1}^{L_{T,T'}} \omega_\alpha \omega_\beta \frac{\phi_{z'}(\xi_\alpha^{T'}) \phi_z(\xi_\beta^T)}{|\xi_\alpha^{T'} - \xi_\beta^T|} \\
 &\quad \times \left(e^{\sigma \Delta t} \beta'_m(t^{n-1/2} - |\xi_\alpha^{T'} - \xi_\beta^T|) + e^{3\sigma \Delta t} \beta'_m(t^{n-3/2} - |\xi_\alpha^{T'} - \xi_\beta^T|) \right).
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen $(\omega_\alpha, \xi_\alpha^T)_{\alpha=1, \dots, N_{T,T'}}$ und $(\omega_\beta, \xi_\beta^{T'})_{\beta=1, \dots, L_{T,T'}}$ Quadraturformeln, die unterschiedlich sind in den Fällen $T = T'$ und $T \neq T'$. Die Terme

$$\beta'_m(t^{n-1/2} - |\xi_\alpha^{T'} - \xi_\beta^T|) \quad \text{und} \quad \beta'_m(t^{n-3/2} - |\xi_\alpha^{T'} - \xi_\beta^T|)$$

können wie oben approximiert werden. Insgesamt ergibt sich wieder ein Zeitschrittschema der Form

$$Q^0 U^n = b^n - \sum_{m=1}^{n-1} Q^m U^{n-m}.$$

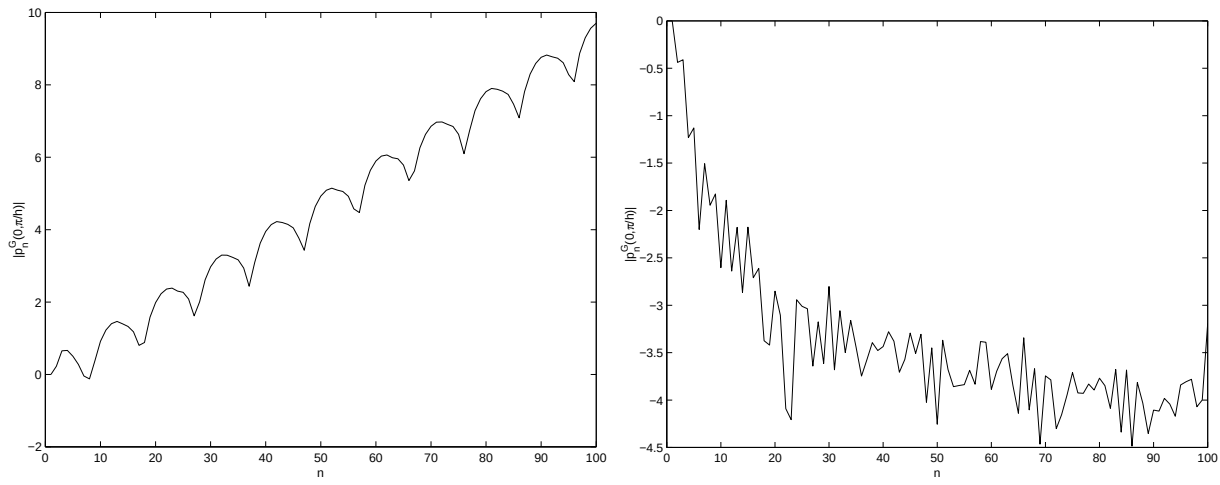


Abbildung 3.17 Amplifikationsfaktoren zur Frequenz $\omega = (0, \pi/h)$ bei der Behandlung des singulären Integrals mit einer Quadraturformel im Galerkinschema. Algorithmus ohne (links) und mit (rechts) Glättungsschritt

Numerische Ergebnisse. Für den Gaußschen Puls $g(x, t) = \exp((2.5 - t)^2)$ zeigten alle getesteten Netzverhältnisse extrem instabile Ergebnisse, die selbst durch die Einführung eines Glättungsschritts nicht stabilisiert werden konnten

3.6.4 Auslassen des Integrationsschritts

Die Diskretisierung der Bilinearform (2.35) führte auf die Gleichung (3.3),

$$C_{T',T'} \partial_t u_{T'}(t^n) = \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha \partial_t g(\Phi_{T'}(\xi_\alpha), t^n) - \sum_{T \in \mathcal{T} \setminus T'} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 C_{T',T}^{\alpha, \beta} \partial_t u_T(t^n - |\Phi_{T'}(\xi_\alpha) - \Phi_T(\xi_\beta)|) \quad (3.16)$$

für Quadraturpunkte ξ_α, ξ_β , affin-lineare Transformationen $\Phi_T, \Phi_{T'}$ und Konstanten $C_{T',T}^{\alpha, \beta}$, die nur von der Geometrie abhängen. Diese Gleichung wurde zeitlich integriert, so daß aufgrund homogener Anfangsbedingungen die Stammfunktionen betrachtet werden konnten. Wird dieser Schritt ausgelassen, so sind die zeitlichen Ableitungen der rechten Seite g und der temporären nodalen Basisfunktionen β_n zu betrachten. Die Funktion $\partial_t g$ wird durch eine Approximation $g'_{h, \Delta t}$ von $\partial_t g$ im diskreten Raum $V_{h, \Delta t}$ ersetzt. Im Fall stückweise affin-linearer Funktionen β_n sind die Ableitungen $\partial_t \beta_n$ gegeben durch

$$\partial_t \beta_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t}, & t \in ((n-1)\Delta t, n\Delta t) \\ \frac{-1}{\Delta t}, & t \in (n\Delta t, (n+1)\Delta t) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist zu beachten, daß die Ableitung der Funktion β_n unstetig ist in den Punkten $(n-1)\Delta t$, $n\Delta t$ und $(n+1)\Delta t$. Auf der rechten Seite der Gleichung (3.16) wird der linksseitige Grenzwert

betrachtet, d.h.

$$\partial_t u_{T'}(t^n) = u_{T'}^n \frac{1}{\Delta t}.$$

Diese Wahl läßt sich dadurch begründen, daß der Term $\partial_t u_T(t^n)$ aus dem Integral

$$\int_{T'} \int_{T'} \frac{\partial_t u_{T'}(t^n - |x - y|)}{|x - y|} ds_y ds_x$$

resultiert. Im Integral ist $|x - y|$ stets positiv, so daß das Zeitargument $t^n - |x - y|$ im gesamten Integrationsbereich kleiner als t^n ist. Für die Ausdrücke $\partial_t u_T(t^n - |\Phi_{T'}(\xi_\alpha) - \Phi_T(\xi_\beta)|)$ aus der rechten Seite von (3.16) ergibt sich mit den Notationen aus Abschnitt 3.2, sofern das Argument kein ganzzahliges Vielfaches der Zeitschrittweite Δt ist, also nicht an Unstetigkeiten ausgewertet wird,

$$\partial_t u_T(t^n - |\Phi_{T'}(\xi_\alpha) - \Phi_T(\xi_\beta)|) = \frac{1}{\Delta t} u_T((n - m_{T,T'}^{\alpha,\beta})\Delta t) - \frac{1}{\Delta t} u_T((n - m_{T,T'}^{\alpha,\beta} - 1)\Delta t),$$

d.h. es wird zwischen ganzzahligen Vielfachen der Zeitschrittweite interpoliert und dabei der rechtsseitige bzw. linksseitige Grenzwert benutzt. Im Fall, daß das Argument $t^n - |\Phi_{T'}(\xi_\alpha) - \Phi_T(\xi_\beta)|$ ein ganzzahliges Vielfaches von Δt ist, so wird wie oben vorgegangen, es wären jedoch auch andere Ansätze denkbar. Für eine stetig differenzierbare Funktion ist der Fehler in dieser Approximation jedoch klein. Der hier gewählte Ansatz hat den Vorteil, daß sich Gleichung (3.16) nun einheitlich schreiben läßt als

$$\frac{C_{T',T'}}{\Delta t} u_{T'}^n = \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha g'_{h,\Delta t}(\Phi_{T'}(\xi_\alpha), t^n) - \sum_{T \in \mathcal{T} \setminus T'} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 C_{T',T}^{\alpha,\beta} \frac{1}{\Delta t} \left(u_T^{n-m_{T,T'}^{\alpha,\beta}} - u_T^{n-m_{T,T'}^{\alpha,\beta}-1} \right)$$

und somit auf ein einfach zu erstellendes Gleichungssystem der Form (3.5) führt.

Bemerkung 3.6.1. Ähnlich wie oben kann das singuläre Integral durch hohe Quadraturformeln berechnet werden.

Numerische Ergebnisse. Um die Qualität der beiden Algorithmen zu vergleichen, wird eine konstruierte rechte Seite g verwendet, so daß sich als Lösung die Funktion $u \equiv t$ ergibt (siehe unten). Abbildung 3.18 zeigt, daß der relative Fehler

$$e(t) := \frac{\|t - U(\cdot, t)\|_{L^2([0,1]^2)}}{t}$$

für den Algorithmus ohne den Integrationsschritt kleiner ist ($h = 1/16$, $r = 1.0$).

3.6.5 Verbesserte Behandlung benachbarter Dreiecke

Tatsächlich tritt in der Diskretisierung der Bilinearform (2.35) nicht nur das iterierte Integral

$$\int_T \int_{T'} \frac{\phi_{h,\Delta t}(y, t^n - |x - y|)}{|x - y|} ds_y ds_x \quad (3.17)$$

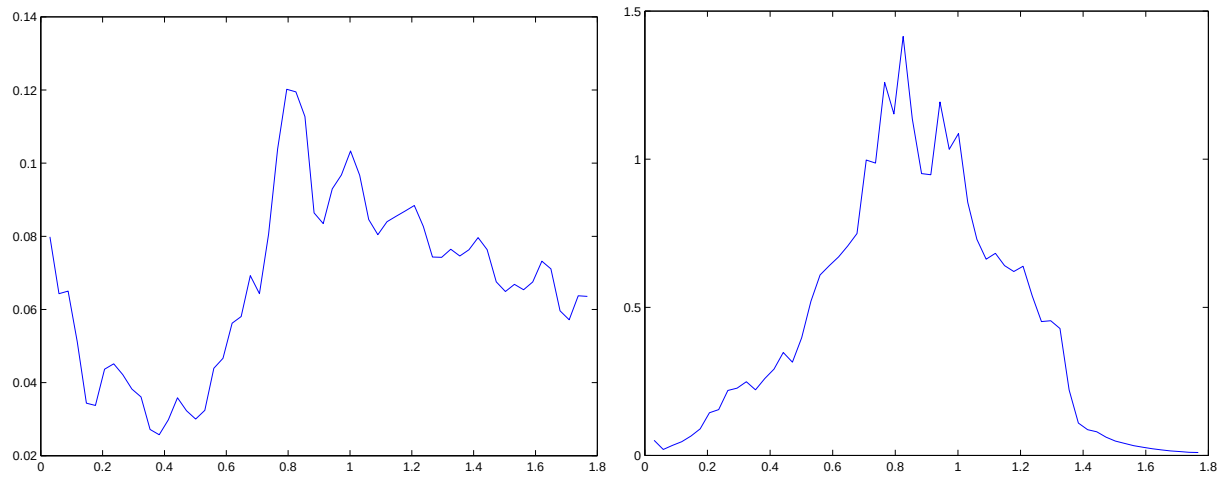


Abbildung 3.18 Relativer Fehler im Ort für das Schema ohne (links) und mit Integrationsschritt (rechts) bei Behandlung des singulären Integrals mit Quadraturformel im Galerkinschema

für $T = T'$ als singuläres auf. Auch im Fall, daß T und T' eine gemeinsame Kante oder einen gemeinsamen Knoten haben, spielen Singularitäten eine Rolle. Bei der Approximation eines der beiden Integrale mittels einer Quadraturformel mit Punkten im Innern von T bzw. T' erscheinen keine Singularitäten mehr, der Fehler in der Approximation wird jedoch groß sein. Um diesen Fehler zu verkleinern, werden beide Integrale mit einer hohen Quadraturformel approximiert. Um den numerischen Aufwand klein zu halten, wird dies immer dann getan, wenn der Abstand der Mittelpunkte x_T und $x_{T'}$ kleiner einem vorgegebenem Parameter ist, also beispielsweise falls $|x_T - x_{T'}| < \rho$.

Numerisches Beispiel. Als numerisches Beispiel wird der Algorithmus ohne Integrationsschritt betrachtet, in dem das singuläre Integral für $T = T'$ mit einer hohen Quadraturformel behandelt wird. Zusätzlich wird ein Stabilisierungsschritt aus Abschnitt (3.6.2) verwendet. Als Parameter wird $\rho = 2h$ verwendet und im Fall $|x_T - x_{T'}| < \rho$ für $T \neq T'$ wird das iterierte Integral (3.17) mittels zweier 73-Punkt Quadraturen behandelt. Als Beispiel wird eine rechte Seite so gewählt, daß die Lösung durch $U \equiv t$ gegeben ist. Abbildung 3.19 zeigt deutlich, daß die Approximation verbessert wird. Es ist interessant zu beobachten, daß auch die Stabilität des Verfahrens größer wird (vergl. Abb. 3.20).

3.6.6 Zusammenfassung der Ergebnisse

Aufgrund der Ergebnisse der letzten Abschnitte könnte empfohlen werden, den folgenden Algorithmus zu verwenden, d.h.

- eine Quadraturformel gemäß Abschnitt 3.3 für das singuläre Integral zu verwenden,
- eine hohe Quadraturformel für benachbarte Dreiecke zu verwenden,

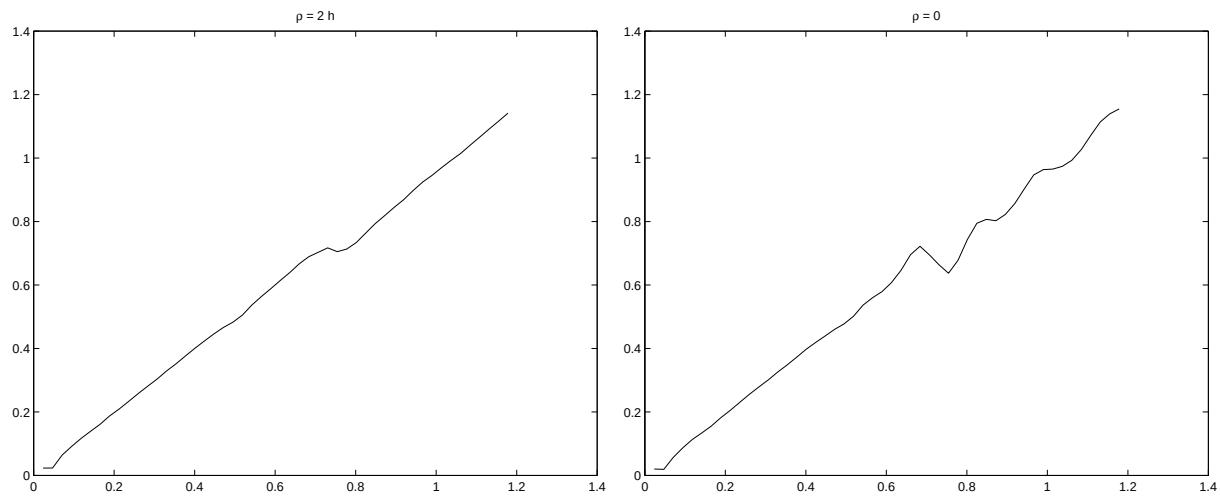


Abbildung 3.19 Lösung nahe des Mittelpunktes der Platte für $h = 1/20$ und $r = 1.0$ im Intervall $[0, 50\Delta t]$, mit verbesserter Approximation benachbarter Dreiecke (links) und ohne (rechts)

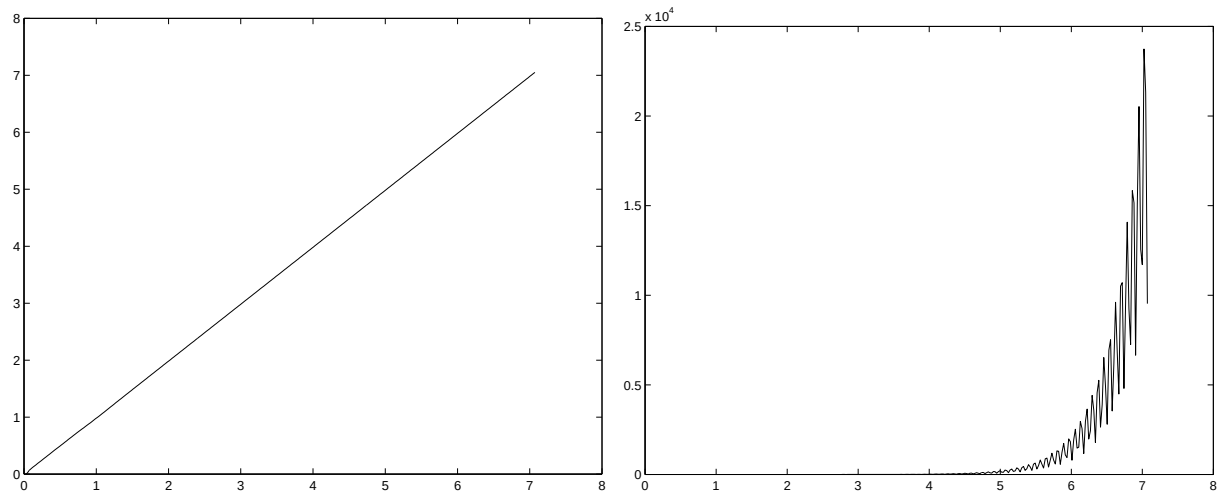


Abbildung 3.20 Die verbesserte Approximation benachbarter Dreiecke verbessert die Stabilität der Verfahren. L^2 -Norm der numerischen Lösung des verbesserten Algorithmus im Intervall $[0, 300\Delta t]$ (links) und des ursprünglichen Algorithmus (rechts)

- den Integrationsschritt auszulassen und
- einen Glättungsschritt durchzuführen.

Die Stabilität dieses Algorithmus kann nicht numerisch nachgewiesen werden, denn eine Fourier-Analyse zeigt, daß es instabile Frequenzen gibt (vergl. Abb. 3.21). In den numerischen Beispielen waren jedoch alle Lösungen stabil. Es wird angenommen, daß die instabile Frequenz nur für sehr feine, kaum berechenbare Netzweiten in Erscheinung tritt.

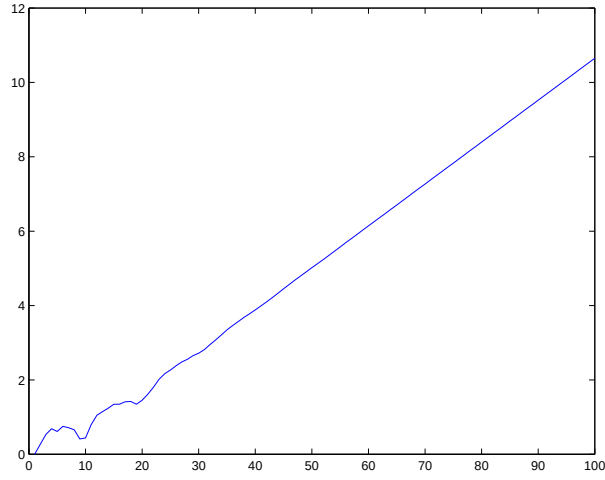


Abbildung 3.21 Die Amplifikationsfaktoren wachsen exponentiell bei einer Frequenz $(0, 3\pi/(8h))$

3.7 Diskretisierungen höherer Ordnung

3.7.1 $(P1, P1)$ –Diskretisierung

Anstelle der stückweise konstanten Ansatzfunktionen im Ort zur Diskretisierung der Bilinearform b wie in Abschnitt 3.2 werden nun stückweise affin-lineare, global stetige Funktionen betrachtet. Für eine Diskretisierung der Oberfläche Γ mittels dreieckiger Facetten $T \in \mathcal{T}$ zu einer approximierenden Oberfläche Γ_h mit Knoten $z \in \mathcal{N}$ läßt sich eine nodale Basis $(\phi_z)_{z \in \mathcal{N}}$ definieren, deren Funktionen sich charakterisieren lassen durch

- Für alle $z \in \mathcal{N}$ ist ϕ_z stetig auf Γ_h und affin-linear auf jedem Dreieck $T \in \mathcal{T}$.
- Für alle $z \in \mathcal{N}$ gilt $\phi_z(z) = 1$ und $\phi_z(z') = 0$ für alle $z' \in \mathcal{N} \setminus \{z\}$.

Damit wird die Lösung $\phi_{h,\Delta t}$ der retardierten Potentialintegralgleichung gesucht im diskreten Raum

$$V_{h,\Delta t} = \left\{ f \in H_\sigma^1(0, \infty; H^{-1/2}(\Gamma_h)); f(x, t) = \sum_{z \in \mathcal{N}} \sum_{n=0}^N c_T^n \beta_n(t) \phi_z(x), (c_T^n)_{T \in \mathcal{T}, 0 \leq n \leq N} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times (N+1)} \right\}.$$

Während in Abschnitt 3.2 die Bilinearform durch Einsetzen der diskreten Lösung und jeweils einem Basiselement $\phi_z \beta_n$ diskretisiert wurde, um die Struktur der Formulierung besser zu verstehen, genügt es hier, zwei Basiselemente einzusetzen, d.h. $b(\phi_z \beta_n, \phi_{z'} \beta_m)$ zu berechnen. Ein Zeitschrittverfahren ergibt sich dann aus der Linearität der Bilinearform in beiden Argumenten. Es ist

$$\begin{aligned} b(\phi_z \beta_n, \phi_{z'} \beta_m) &= \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{\phi_{z'}(y) \partial_t \beta_m(t - |x - y|) \phi_z(x) \beta_n(t)}{|x - y|} ds_y ds_x dt \\ &\approx 2\Delta t e^{-2\sigma t^n} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{\phi_{z'}(y) \partial_t \beta_m(t^n - |x - y|) \phi_z(x)}{|x - y|} ds_y ds_x \\ &= 2\Delta t e^{-2\sigma t^n} \sum_{T \subset \omega_z} \sum_{T' \subset \omega_{z'}} \int_T \int_{T'} \frac{\phi_{z'}(y) \partial_t \beta_m(t^n - |x - y|) \phi_z(x)}{|x - y|} ds_y ds_x, \end{aligned}$$

mit den Trägern ω_z und $\omega_{z'}$ von ϕ_z bzw. $\phi_{z'}$. Für zwei verschiedene Dreiecke $T \subset \omega_z$ und $T' \subset \omega_{z'}$ wird das Integral in der Summe approximiert durch zwei Gaußsche Quadraturen, die beispielsweise davon abhängen können, wie weit die Mittelpunkte der Dreiecke voneinander entfernt sind. Im Fall $T = T'$ wird das Integral mittels der in Abschnitt 3.6.1 vorgestellten Formel behandelt. Die rechte Seite der Formulierung $(P_{h,\Delta t})$ aus Abschnitt 2.5.2 wird ähnlich wie die Bilinearform behandelt,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \beta_m(t) \int_\Gamma \phi_z(x) \partial_t g_h(x, t) ds_x dt &\approx 2\Delta t e^{-2\sigma t^n} \int_{\Gamma_h} \phi_z(x) \partial_t g_h(x, t^n) ds_x \\ &= 2\Delta t e^{-2\sigma t^n} \sum_{T' \subset \omega_z} \int_{T'} \phi_z(x) \partial_t g_h(x, t^n) ds_x \end{aligned}$$

und wieder wird eine Gaußsche Dreipunktquadratur zur Approximation des Oberflächenintegrals verwendet. Wie bei stückweise konstanten Ansatzfunktionen resultieren die Approximationen nach Auswertung der temporären Basisfunktionen durch Interpolation zwischen ganzzahligen Vielfachen der Zeitschrittweite Δt (vergleiche Abschnitt 3.6.4) in einem Schema der Form

$$Q^0 A^n = g^n - \sum_{m=1}^n Q^m A^{n-m}$$

bei dem die Matrizen Q^m von der Dimension $\text{card } \mathcal{N} \times \text{card } \mathcal{N}$ sind. Die Vektoren $A^k = (a_z^k)_{z \in \mathcal{N}}$ enthalten die Koeffizienten der Ansatzfunktionen ϕ_z zum Zeitpunkt t^k . Die Matrizen lassen sich elementweise assemblieren. Dazu seien $T, T' \in \mathcal{T}$ zwei beliebige Dreiecke und $\xi \in T, \xi' \in T'$ zwei Quadraturpunkte auf T bzw. T' mit Gewichten ω und ω' . Weiter seien z_1, z_2, z_3 die Eckpunkte von T und z'_1, z'_2, z'_3 die von T' . Die Matrix

$$A_{T,T'}^{\xi,\xi'} = 4|T||T'| \frac{\omega\omega'}{|\xi - \xi'| \Delta t} \begin{bmatrix} \phi_{z'_1}(\xi') \phi_{z_1}(\xi) & \phi_{z'_1}(\xi') \phi_{z_2}(\xi) & \phi_{z'_1}(\xi') \phi_{z_3}(\xi) \\ \phi_{z'_2}(\xi') \phi_{z_1}(\xi) & \phi_{z'_2}(\xi') \phi_{z_2}(\xi) & \phi_{z'_2}(\xi') \phi_{z_3}(\xi) \\ \phi_{z'_3}(\xi') \phi_{z_1}(\xi) & \phi_{z'_3}(\xi') \phi_{z_2}(\xi) & \phi_{z'_3}(\xi') \phi_{z_3}(\xi) \end{bmatrix},$$

wobei $|T|, |T'|$ die Oberflächenmaße von T bzw. T' bezeichnen, wird dann zur Teilmatrix

$$Q^m([z_1, z_2, z_3], [z'_1, z'_2, z'_3])$$

und multipliziert mit (-1) zur Teilmatrix

$$Q^{m+1}([z_1, z_2, z_3], [z'_1, z'_2, z'_3])$$

addiert. Dabei ist der Index m gegeben durch

$$m = \lfloor |\xi - \xi'| / \Delta t \rfloor$$

mit der Operation $\lfloor \cdot \rfloor$ aus Abschnitt 3.1. Es ist entscheidend, daß $[z_1, z_2, z_3]$ und $[z'_1, z'_2, z'_3]$ hier nicht als Mengen sondern als Listen betrachtet werden.

Numerisches Beispiel. Es wird wieder das Beispiel auf dem Einheitsquadrat $\Gamma = [0, 1]^2 \times \{0\}$ mit der rechten Seite $g(x, t) = \exp(-10(t - 2.5)^2)$ aus den obigen Abschnitten betrachtet. Wieder wird ein Glättungsschritt eingeführt, der die Stabilität des Algorithmus verbessert (vergl. Abbildung

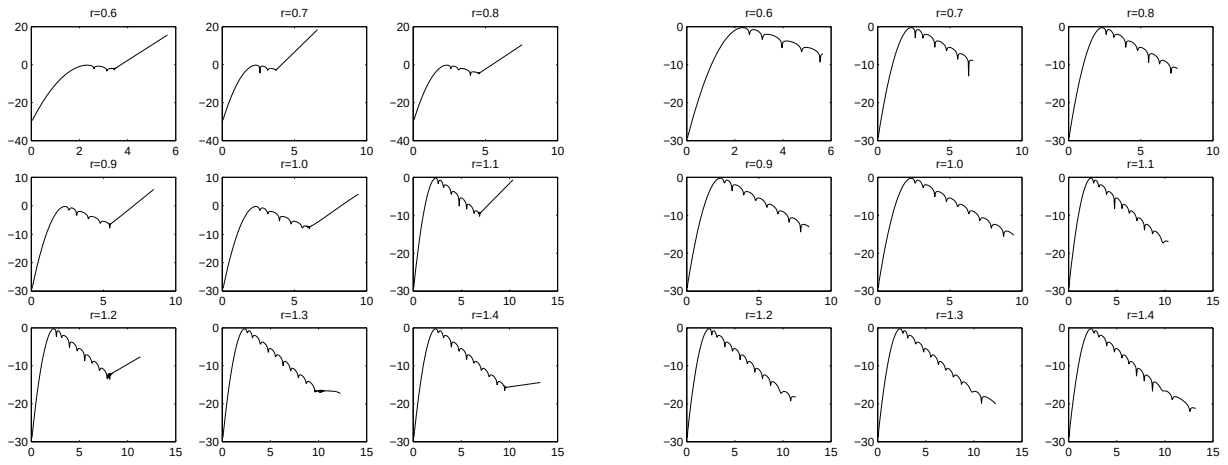


Abbildung 3.22 Logarithmen der numerischen stückweise affin-linearen Lösungen im Ort für verschiedene Netzverhältnisse ($h = 1/16$) ohne Glättungsschritt (links) und mit Glättungsschritt (rechts)

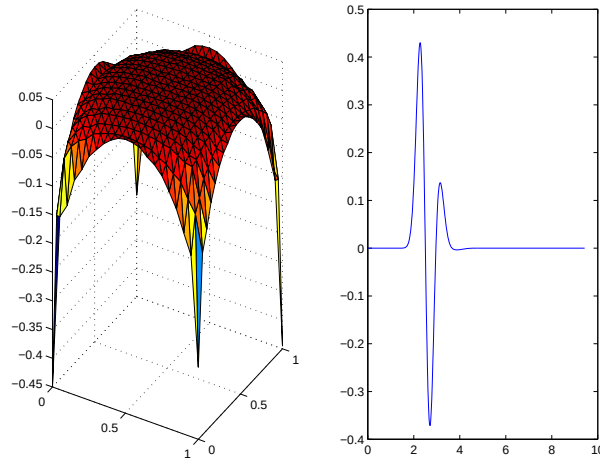


Abbildung 3.23 Numerische Lösung mit $P1$ -finiten Elementen nach 140 Zeitschritten (links) und Lösung am Mittelpunkt der Platte (rechts)

3.22). Eine stabile Lösung ist in Abbildung 3.23 gezeigt. Für verschiedene Netzverhältnisse und Netzweiten bis zu $h = 1/30$ konnten keine instabilen Lösungen beobachtet werden.

Stabilität. Es wird davon ausgegangen, daß der scheinbar stabile Algorithmus für die $(P1, P1)$ -Diskretisierung instabil wird für feine Netzweiten h . Eine Fourier-Analyse wie in Abschnitt ergibt das in Abbildung 3.24 gezeigte Verhalten der Amplifikationsfaktoren zur Frequenz $(0, 3\pi/(8h))$.

Der Stabilitätstest für die $(P1, P1)$ -Diskretisierung läßt sich folgendermaßen durchführen. Die Lösung U wird mit Vektoren $V_{j,k}$ identifiziert, der die fünf nodalen Werte der Lösung auf dem Quadrat mit unterer linker Ecke (jh, kh) enthält. Dann läßt sich zeigen, daß die Normen $\sum_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2} |V_{j,k}|$ und $\|U\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ äquivalent sind. Um die Amplifikationsfaktoren zu berechnen, kann der in diesem Abschnitt beschriebene Algorithmus für eine ausreichend große flache Platte berechnet werden. Von den daraus resultierenden Matrizen Q^l werden nur die Zeilen benötigt, die den fünf Koeffizienten eines beliebigen Quadrats, also beispielsweise des Einheitsquadrats, entsprechen, benötigt. Die Einträge in den verbleibenden Zeilen entsprechen dann einem Shift-Operator auf das Quadrat des

betrachteten Koeffizienten. Eine diskrete Fourier-Transformation erlaubt dann die Einführung der Amplifikationsfaktoren wie in Abschnitt 3.4.

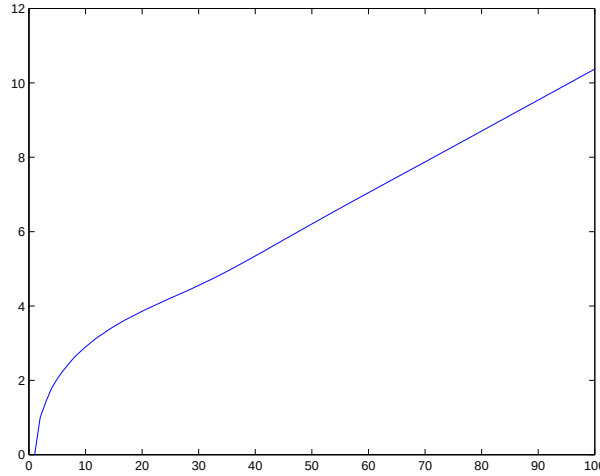


Abbildung 3.24 Langsam wachsende instabile Frequenz in der $(P1, P1)$ -Diskretisierung

3.7.2 $(P1, P2)$ -Diskretisierung

Satz 2.6.3 suggerierte, daß das optimale Verhältnis der polynomialen Approximationsgrade $m_2 = m_1 + 1$ ist. Dabei ist m_1 der Polynomgrad der örtlichen Ansatzfunktionen und m_1 der der temporären Basisfunktionen. Für die stückweise affinen Ansatzfunktionen im Ort sollten daher quadratische Funktionen in der Zeit gewählt werden. Für eine uniforme Diskretisierung des Zeitintervalls mit Schrittweite Δt ist ein linear unabhängiges System von stückweise quadratischen Ansatzfunktionen gegeben durch $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mit

$$\beta_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t - t^{n-2})^2, & t \in ((n-2)\Delta t, (n-1)\Delta t], \\ -(t - t^{n-1})^2 + \frac{\Delta t^2}{2} + \Delta t(t - t^{n-1}), & t \in ((n-1)\Delta t, n\Delta t], \\ \frac{1}{2}(t - t^n) - \frac{\Delta t^2}{2} - 2\Delta t(t - t^n) + \Delta t(t - t^{n-1}), & t \in (n\Delta t, (n+1)\Delta t], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Diskretisierung der Bilinearform (2.35) läßt sich nicht so einfach durchführen wie im Falle stückweise affin-linearer Ansatzfunktionen. Zur Approximation des Zeitintegrals sollten zunächst zwei Quadraturpunkte verwendet werden, da sich der Träger einer Basisfunktion über drei Teilintervalle erstreckt. Beim Testen der Lösung gegen eine Basisfunktion β_{n-1} liefert damit dieselbe Funktion β_{n-1} in der Linearkombination der Lösung den höchsten Beitrag, während β_n zu einem relativ kleinen Beitrag führt. In der Herleitung eines Zeitschrittschemas der Form (3.5) heißt dies, daß die Einträge in der Matrix Q^0 sehr klein sind. Dies läßt befürchten, daß das Schema extrem instabil wird. Diese Vermutung bestätigt sich auch in numerischen Experimenten. Vorteil dieser Diskretisierung ist, daß beim Auslassen des Integrationsschritts keine Unstetigkeiten in den Ableitungen der temporären Basisfunktionen zu berücksichtigen sind.

Numerische Ergebnisse. In den numerischen Beispielen wurden nur instabile Ergebnisse erzielt, die sich auch durch Einführen eines Glättungsschritts nicht stabilisieren ließen.

3.8 Konvergenzuntersuchungen

In der a priori Fehleranalyse der Variationsformulierung für die retardierte Potentialintegralgleichung garantierte Theorem 2.6.3 Konvergenz der vorgestellten Verfahren, sofern die Bilinearform exakt behandelt wird. Ähnlich wie die Stabilität wird auch die Konvergenz der Algorithmen stark von den numerischen Approximationen abhängen. In diesem Abschnitt soll an zwei Beispielen untersucht werden, inwiefern Konvergenz in der Praxis erwartet werden darf.

Beispiel 1. Um eine exakte Lösung der retardierten Potentialintegralgleichung zu kennen, wird eine spezielle rechte Seite konstruiert. Dazu sei $u(x, t) \equiv 0$ für $t < 0$ und $u(x, t) \equiv t$ für $t \geq 0$. Als rechte Seite der Integralgleichung wird dann

$$g(x, t) := \int_{[0,1]^2 \times \{0\}} \frac{u(y, t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y$$

benutzt. Ähnlich wie bei der Berechnung des singulären Integrals kann g analytisch berechnet werden.

Numerische Ergebnisse. Abbildung 3.25 zeigt die Konvergenzresultate für das einfache Galerkinschema aus Abschnitt 3.2. Es ist überraschend, daß bezüglich der Netzweite sogar quadratische Konvergenz zu einem fixierten Zeitpunkt beobachtet werden kann. In der vollen Norm wird der Fehler jedoch nur langsam klein. Für die anderen Algorithmen konnte keine Konvergenz beobach-

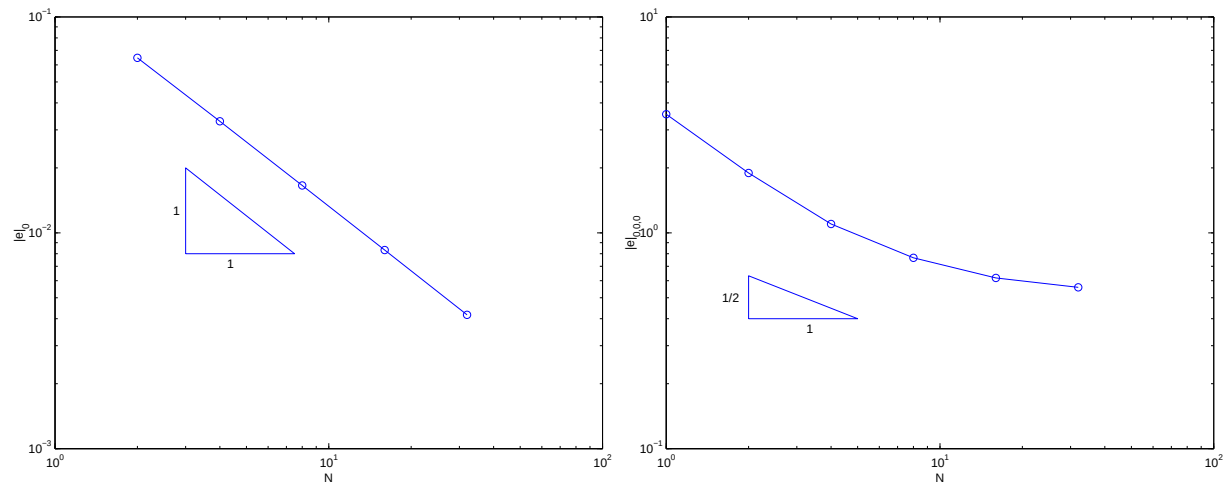


Abbildung 3.25 Verhalten des relativen Fehlers $\|e\|_{L^2(\Gamma)}$ zum Zeitpunkt $t = 11.8$ (links) und $|e|_{0,0,0}$ (rechts). Dabei ist $r = 0.9$

tet werden, jedoch ist der Fehler wesentlich kleiner als für die einfache Approximation (vergl. Abb. 3.26).

Beispiel 2. Es wird noch einmal das Beispiel mit $g(x, t) = \exp(-10(t - 2.5)^2)$ betrachtet. Da hier die analytische Lösung nicht bekannt ist, wird eine Folge von Lösungen auf verschiedenen feinen

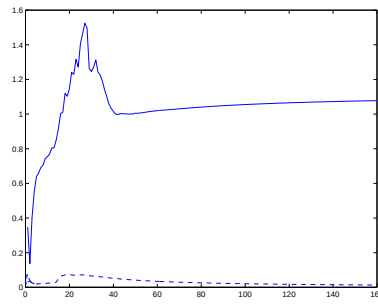


Abbildung 3.26 Relativer Fehler in der L^2 -Norm aufgetragen gegen die Zeit für das einfache Galerkin-Schema (–) und den Algorithmus aus Abschnitt 3.6.6 (– –) für $h = 1/16$ und $r = 1.3$

Gittern betrachtet. Abbildung 3.27 zeigt die verschiedenen Lösungen nahe des Mittelpunktes des Einheitsquadrats. Dabei ist deutlich ein Glättungseffekt zu erkennen.

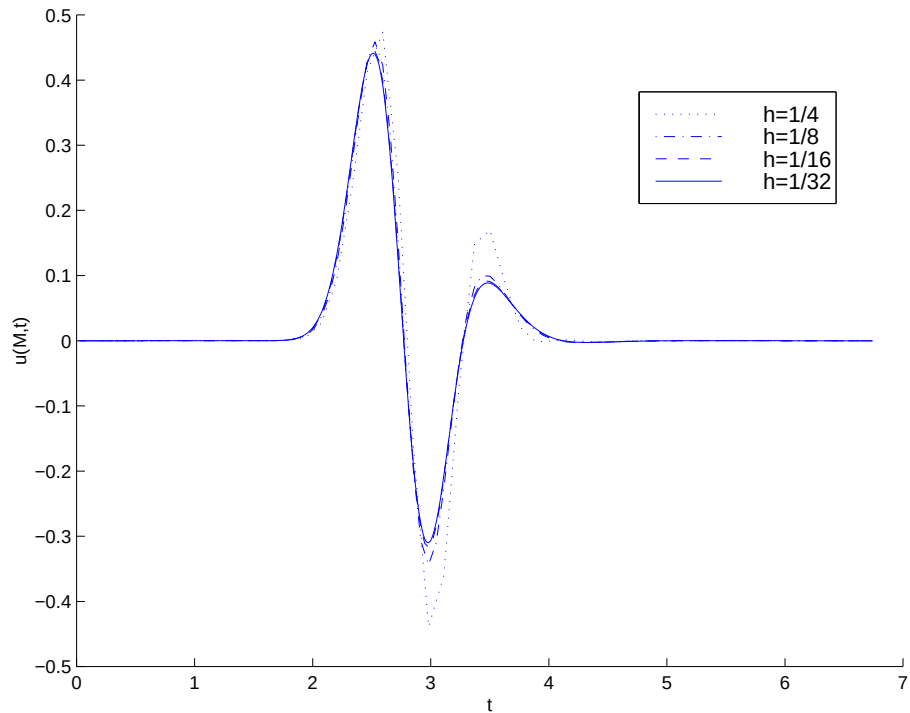


Abbildung 3.27 Lösung nahe des Mittelpunktes M des Einheitsquadrats für verschiedene Werte von h bei gleichbleibendem Netzverhältnis $r = 1.0$

3.9 Numerisches Beispiel im Fall einer gekrümmten Oberfläche

Als numerisches Beispiel für eine gekrümmte geschlossene Oberfläche wird eine Ellipse betrachtet und der Algorithmus aus Abschnitt 3.6.5 verwendet. Die rechte Seite ist wieder der Gaußsche Puls. Eine Triangulierung mit 1388 Elementen ist in Abbildung 3.28 gezeigt. Die Dichte nach 150 und 200 Zeitschritten für eine Zeitschrittweite $\Delta t = 0.0707$ ist in Abbildung 3.29 gezeigt.

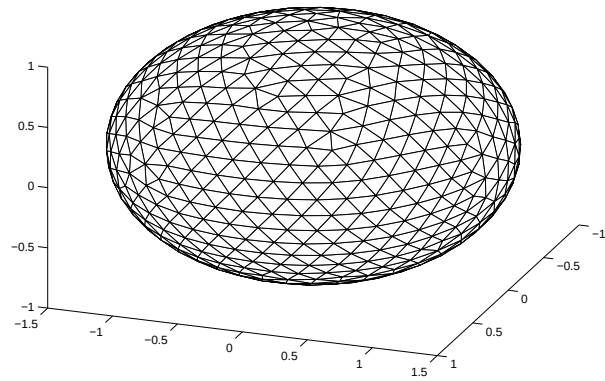


Abbildung 3.28 Triangulierung mit 1388 Elementen

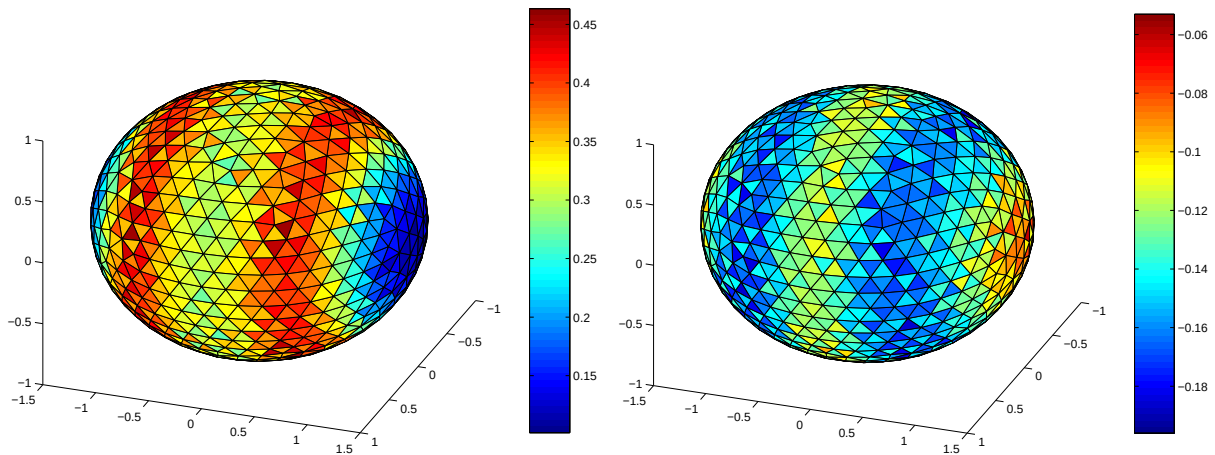


Abbildung 3.29 Lösung nach 150 und 200 Zeitschritten für die Ellipse. Dabei wurde der in Abschnitt 3.6.6 beschriebene Algorithmus verwendet



Kapitel 4

Analyse der Feldintegralgleichung

In diesem Kapitel wird eine Variationsformulierung für die sogenannte elektrische Feldintegralgleichung gegeben. Diese Randintegralgleichung ergibt sich aus der Formulierung der Probleme (1.11) und (1.12). Die Ideen entsprechen denen der Analyse der retardierten Potentialintegralgleichung. Daher wird hier auf eine tiefergehende Beweisführung verzichtet. Es wird im wesentlichen der Argumentation in [Pu] gefolgt.

4.1 Oberflächendifferentialoperatoren und Spurräume

Zur direkten Analyse elektromagnetischer Streufelder werden einige Differentialoperatoren auf Oberflächen benötigt. Dazu sei Γ der glatte Rand eines beschränkten Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Für eine glatte skalare oder vektorwertige Funktion u auf Γ bezeichne $\tilde{u}$ eine glatte Fortsetzung von u auf eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$ von Γ .

Definition 4.1.1 (Oberflächendifferentialoperatoren). Es sei $T : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein glattes, tangentiales Vektorfeld, d.h. $T \cdot n = 0$ auf Γ , und $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte, skalare Funktion auf Γ . Die *Oberflächenrotation* von T , $\text{curl}_\Gamma T$, ist definiert durch die skalare Größe

$$\text{curl}_\Gamma T := n \cdot \text{curl } \tilde{T}.$$

Die *tangentiale Rotation* von u , bezeichnet durch $\text{Curl}_\Gamma u$, ist gegeben durch

$$\text{Curl}_\Gamma u := n \times \text{grad } \tilde{u}$$

und kann mittels der Beziehung

$$\langle \text{curl}_\Gamma T, \phi \rangle_\Gamma = - \langle T, \text{Curl}_\Gamma \phi \rangle_\Gamma \quad (\phi \in C^\infty(\Gamma))$$

für Distributionenräume definiert werden. Die *Oberflächendivergenz* von T , $\text{div}_\Gamma T$, ist durch die Relation

$$\text{div}_\Gamma T := - \text{curl}_\Gamma (T \times n)$$

definiert. Der *tangentiale Gradient* von u ist per Dualität gegeben durch

$$\langle T, \text{grad}_\Gamma u \rangle_\Gamma = - \langle \text{div}_\Gamma T, u \rangle_\Gamma .$$

Bemerkung 4.1.1. Die Definitionen sind unabhängig von den Fortsetzungen $\tilde{u}, \tilde{T}$.

Bemerkung 4.1.2. Die Oberflächendifferentialoperatoren können auch für offene Oberflächen definiert werden. In der Dualität sind dann jedoch Spuren auf $\partial\Gamma$ zu berücksichtigen.

Die Oberflächendifferentialoperatoren erlauben es, die folgenden Spurräume zu definieren.

Definition 4.1.2. Mit den obigen Bezeichnungen sei

$$\begin{aligned} H^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma) &:= \left\{ c \in H^{-1/2}(\Gamma)^3; c \cdot n = 0 \text{ auf } \Gamma, \operatorname{div}_\Gamma c \in H^{-1/2}(\Gamma) \right\}, \\ H^{-1/2}(\operatorname{curl}, \Gamma) &:= \left\{ c \in H^{-1/2}(\Gamma)^3; c \cdot n = 0 \text{ auf } \Gamma, \operatorname{curl}_\Gamma c \in H^{-1/2}(\Gamma) \right\}. \end{aligned}$$

$H^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma)$ und $H^{-1/2}(\operatorname{curl}, \Gamma)$ seien mit den natürlichen Normen

$$\|\cdot\|_{-1/2, \operatorname{div}, \Gamma}^2 := \|\cdot\|_{-1/2, \Gamma}^2 + \|\operatorname{div}_\Gamma \cdot\|_{-1/2, \Gamma}^2 \quad \text{und} \quad \|\cdot\|_{-1/2, \operatorname{curl}, \Gamma}^2 := \|\cdot\|_{-1/2, \Gamma}^2 + \|\operatorname{curl}_\Gamma \cdot\|_{-1/2, \Gamma}^2$$

ausgestattet.

Satz 4.1.1. Wird $L^2(\Gamma)$ identifiziert mit seinem Dualraum, so ist $H^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma)$ der Dualraum von $H^{-1/2}(\operatorname{curl}, \Gamma)$ und umgekehrt.

Beweis. Siehe [Pu]. □

Bemerkung 4.1.3. Die Definition der Oberflächendivergenz $\operatorname{div}_\Gamma$ kann folgendermaßen motiviert werden. Dazu sei u ein glattes, tangentiales Vektorfeld auf Γ und L ein geschlossener Pfad in Γ . M bezeichne die Teilmenge von Γ , die von L eingeschlossen wird. Dann ist nach dem Stokesschen Integralsatz

$$\begin{aligned} \int_L u \cdot (n \times t) \, dl &= - \int_L (n \times u) \cdot t \, dl \\ &= - \int_M n \times \operatorname{curl}(n \times u) \, ds_x \\ &= - \int_M \operatorname{div}_\Gamma u \, ds_x, \end{aligned}$$

also kann $\operatorname{div}_\Gamma u$ integriert über M interpretiert werden als der Anteil, der aus M 'herausfließt'. Für $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ entspricht $\operatorname{div}_\Gamma$ dem zweidimensionalen Divergenzoperator.

Lemma 4.1.1. Es seien $v, w \in C^\infty(\Gamma)$. Dann gilt

1. $n \times n \times n \times v = -n \times v$;
2. $(n \times v) \cdot w = -v \cdot (n \times w)$.

Beweis. Es gilt mit $2 + 2 \equiv 1$, $3 + 1 \equiv 1$ und $3 + 2 \equiv 2$

$$(n \times v)_i = n_{i+1} v_{i+2} - n_{i+2} v_{i+1},$$

folglich

$$(n \times n \times v)_i = n_i n_{i+1} v_{i+1} - n_{i+1}^2 v_i - n_{i+2}^2 v_i + n_{i+2} n_i v_{i+2}$$

und

$$\begin{aligned} (n \times n \times n \times v)_i &= n_i n_{i+1} n_{i+2} v_i - n_i^2 n_{i+1} v_{i+2} - n_{i+1}^3 v_{i+2} \\ &\quad + n_{i+1}^2 n_{i+2} v_{i+1} - n_{i+1} n_{i+2}^2 v_{i+2} + n_{i+2}^3 v_{i+1} + n_i^2 n_{i+2} v_{i+1} - n_i n_{i+1} n_{i+2} v_i \\ &= -n_{i+1} (n_i^2 + n_{i+1}^2 + n_{i+2}^2) v_{i+2} + n_{i+2} (n_i^2 + n_{i+1}^2 + n_{i+2}^2) v_{i+2} \\ &= -n_{i+1} v_{i+2} + n_{i+2} v_{i+1} = -(n \times v)_i. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} (n \times v) \cdot w &= (n_2 v_3 - n_3 v_2) w_1 + (n_3 v_1 - n_1 v_3) w_2 + (n_1 v_2 - n_2 v_1) w_3 \\ &= v_1 (n_3 w_2 - n_2 w_3) + v_2 (n_1 w_3 - n_3 w_1) + v_3 (n_2 w_1 - n_1 w_2) \\ &= -v \cdot (n \times w) \end{aligned}$$

□

Satz 4.1.2. Für $v \in H(\text{curl}, \Omega)$ sei $n \times v \in H^{-1/2}(\Gamma)$ definiert durch

$$\langle n \times v, \psi \rangle_\Gamma = \int_\Omega \text{curl } v \bar{u} \, dx - \int_\Omega v \text{curl } \bar{u} \, dx, \quad (4.1)$$

mit $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$ und $u \in H^1(\Omega)$ so, daß $u|_\Gamma = \psi$. Dann definiert (4.1) eine stetige, lineare Abbildung von $H(\text{curl}, \Omega)$ nach $H^{-1/2}(\Gamma)$ und stimmt für glatte Funktionen mit der Tangentialkomponente von v auf Γ überein.

Beweis. Siehe [GiRa].

□

Lemma 4.1.2. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und $\Gamma = \partial\Omega$ eine glatte Oberfläche. Dann gilt

1. Die Abbildung $v \mapsto (n \times v)|_\Gamma$, $v \in H(\text{curl}, \Omega)$ definiert eine lineare, stetige und surjektive Abbildung von $H(\text{curl}, \Omega)$ nach $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$.
2. Die Abbildung $v \mapsto n \times (n \times v)|_\Gamma$, $v \in H(\text{curl}, \Omega)$ definiert eine lineare, stetige und surjektive Abbildung von $H(\text{curl}, \Omega)$ nach $H^{-1/2}(\text{curl}, \Gamma)$.

Beweis. Siehe [Pu].

□

Wesentliche Konsequenz dieses Lemmas ist die folgende Variante der Greenschen Formel.

Satz 4.1.3. Es seien $u, v \in H(\text{curl}, \Omega)$. Dann gilt

$$\langle n \times v, -n \times (n \times v) \rangle_\Gamma = \int_\Omega \text{curl } v \bar{u} \, dx - \int_\Omega v \text{curl } \bar{u} \, dx. \quad (4.2)$$

Beweis. Es seien $u, v \in H(\text{curl}, \Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega})^3$. Dann gilt mit (4.1) und Lemma 4.1.1

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \text{curl } v \overline{u} \, dx - \int_{\Omega} v \text{curl } \overline{u} \, dx &= \int_{\Gamma} n \times v \overline{u} \, ds_x \\
&= \langle -n \times (n \times (n \times v)), u \rangle_{\Gamma} \\
&= \langle n \times (n \times v), n \times u \rangle_{\Gamma} \\
&= \langle n \times v, -n \times (n \times u) \rangle_{\Gamma}.
\end{aligned}$$

Der allgemeine Fall folgt aus einem Dichtigkeitsargument, dem vorangegangenen Lemma sowie der Dualität von $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$ und $H^{-1/2}(\text{curl}, \Gamma)$. $\square$

4.2 Existenz und Eindeutigkeit

Analog zur Vorgehensweise im Teilproblem der skalaren retardierten Potentialintegralgleichung kann die Formulierung elektromagnetischer Streufelder untersucht werden. Dazu wird zunächst die zeitharmonische Formulierung von (1.11) und (1.12) betrachtet.

Zu gegebenem $\omega \in \mathbb{C}$, $\text{Im } \omega > 0$, finde $(E, B) \in (H(\text{curl}, \Omega) \cap H(\text{curl}, \Omega'))^2$ so, daß

$$(Q_{\Omega'}^\omega) \quad \begin{cases} i\omega E + \text{curl } B &= 0, \\ -i\omega B + \text{curl } E &= 0 \quad \text{in } \Omega' \\ n \times E &= c \quad \text{auf } \Gamma \end{cases}$$

und

$$(Q_{\Omega}^\omega) \quad \begin{cases} i\omega E + \text{curl } B &= 0, \\ -i\omega B + \text{curl } E &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ n \times E &= c \quad \text{auf } \Gamma \end{cases}$$

für gegebenes $c := n \times E^{inc} \in H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$.

Bemerkung 4.2.1. Die Ausstrahlungsbedingungen aus Bemerkung 1.7.2 wurden hier ersetzt durch die Forderung $(E, B) \in (H(\text{curl}, \Omega')^2$.

Bemerkung 4.2.2. (i) Die Bedingungen $\text{div } E = \text{div } B = 0$ wurden hier nicht mit aufgeführt, denn für Lösungen $E, B \in (H(\text{curl}, \Omega) \cap H(\text{curl}, \Omega'))^2$ folgt

$$E = \frac{-1}{i\omega} \text{curl } B \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{i\omega} \text{curl } E,$$

so daß die Divergenzfreiheit der Vektorfelder gewährleistet ist.

(ii) Für ein anliegendes Feld $E^{inc} \in H(\text{curl}, \mathbb{R}^3)$ ist die tangentielle Komponente $n \times E^{inc}$ in $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$ und wurde in der Formulierung durch c ersetzt.

Definition 4.2.1 (Schwache Formulierung). In der schwachen Formulierung von (Q_{Ω}^ω) und $(Q_{\Omega'}^\omega)$ wird E mittels der Beziehung $E = \frac{-1}{i\omega} \text{curl } B$ eliminiert und B als Lösung der Variationsformulierung

$$\int_{\Omega} (\text{curl } B \text{curl } \overline{F} - \omega^2 B \overline{F}) \, dx = \langle i\omega c, -n \times n \times F \rangle_{\Gamma} \quad (F \in H(\text{curl}, \Omega)) \quad \text{und} \quad (4.3)$$

$$\int_{\Omega'} (\text{curl } B \text{curl } \overline{F} - \omega^2 B \overline{F}) \, dx = \langle i\omega c, -n \times n \times F \rangle_{\Gamma} \quad (F \in H(\text{curl}, \Omega')) \quad (4.4)$$

gesucht. Diese Formulierung ergibt sich aus (4.2).

Lemma 4.2.1 (Fortsetzungslemma). Es sei $\psi \in H^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma)$ und $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} \omega > 0$. Dann existiert eine Funktion $v \in H(\operatorname{curl}, \Omega)$ mit $n \times v = \psi$ auf Γ und

$$\|\omega v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{curl} v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{\sigma, \Gamma} |\omega| \|\psi\|_{-1/2, \operatorname{div}, \Gamma},$$

mit einer Konstanten $C_{\sigma, \Gamma}$, die nur von Γ und $\sigma := \operatorname{Im} \omega$ abhängt. Die gleiche Aussage ist gültig, wenn Ω durch Ω' ersetzt wird.

Beweis. Siehe [Pu]. □

Lemma 4.2.2. Die Abbildung $\|\cdot\|_{\operatorname{curl}, \omega, \Omega} : H(\operatorname{curl}, \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$v \mapsto \left(\|\omega v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{curl} v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad (v \in H(\operatorname{curl}, \Omega))$$

definiert für $\operatorname{Im} \omega > 0$ eine zu $\|\cdot\|_{\operatorname{curl}, \Omega}$ äquivalente Norm auf $H(\operatorname{curl}, \Omega)$ und auf $H(\operatorname{curl}, \Omega')$, sofern Ω durch Ω' ersetzt wird.

Beweis. Der Beweis erfolgt wie der des entsprechenden Lemmas in Kapitel 2. □

Satz 4.2.1. Das Problem (Q_{Ω}^{ω}) hat genau eine Lösung $(E, H) \in H(\operatorname{curl}, \Omega)^2$. Für diese Lösung gilt

$$\|E\|_{\operatorname{curl}, \omega, \Omega} \leq C_{\sigma_0, \Gamma} |\omega|^2 \|c\|_{-1/2, \operatorname{div}, \Gamma}.$$

Die gleiche Aussage gilt für $(Q_{\Omega'}^{\omega})$. Desweiteren ist

$$\|B\|_{\operatorname{curl}, \omega, \Omega} = \|E\|_{\operatorname{curl}, \omega, \Omega} \quad \text{und} \quad \|B\|_{\operatorname{curl}, \omega, \Omega'} = \|E\|_{\operatorname{curl}, \omega, \Omega'}.$$

Beweis. Wieder kann das Problem mit der direkten Methode der Variationsrechnung gelöst werden. Die Abbildung $a : H(\operatorname{curl}, \Omega) \times H(\operatorname{curl}, \Omega) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(F_1, F_2) \mapsto \int_{\Omega} (\operatorname{curl} F_1 \operatorname{curl} \overline{F_2} - \omega^2 F_1 \overline{F_2}) \, dx$$

definiert eine stetige Bilinearform auf $H(\operatorname{curl}, \Omega)^2$. Weiter ist a elliptisch und

$$|a(F, F)| \geq C_{\sigma_0} \frac{1}{|\omega|} \|F\|_{\operatorname{curl}, \omega, \Omega}^2,$$

wie sich wie in Kapitel 2 verifizieren läßt. Damit hat die schwache Formulierung (4.3) eine eindeutige Lösung B , die die Orthogonalität $a(B, F) = 0$ erfüllt für alle $F \in H(\operatorname{curl}, \Omega)$ mit $n \times n \times F = 0$ auf Γ . Es sei $E := \frac{-1}{i\omega} \operatorname{curl} B$. Dann gilt wegen

$$\int_{\Omega} \operatorname{curl} E \overline{G} \, dx = i\omega \int_{\Omega} B \overline{G} \, dx \quad (G \in H(\operatorname{curl}, \Omega))$$

die Orthogonalität

$$\begin{aligned}
a(E, F) &= \int_{\Omega} (\operatorname{curl} E \operatorname{curl} \overline{F} - \omega^2 E \overline{F}) \, dx \\
&= \int_{\Omega} (\operatorname{curl} E \operatorname{curl} \overline{F} + (-i\omega)(-i\omega) E \overline{F}) \, dx \\
&= \int_{\Omega} (i\omega B \operatorname{curl} \overline{F} - i\omega \operatorname{curl} B \overline{F}) \, dx \\
&= \int_{\Omega} (i\omega \operatorname{curl} B \overline{F} - i\omega \operatorname{curl} B \overline{F}) \, dx + i\omega \langle n \times B, -n \times n \times F \rangle_{\Gamma} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Damit gilt für alle $F_0 \in H(\operatorname{curl}, \Omega)$ mit $n \times n \times F_0 = n \times c$, unter Berücksichtigung von $n \times n \times E = n \times c$,

$$\begin{aligned}
C_{\sigma_0} \frac{1}{|\omega|} \|E\|_{\operatorname{curl}, \omega, \Omega}^2 &\leq a(E, E) = a(E, E + (F_0 - E)) = a(E, F_0) \\
&\leq \|E\|_{\operatorname{curl}, \omega, \Omega} \|F_0\|_{\operatorname{curl}, \omega, \Omega} \\
&\leq C_{\sigma_0, \Gamma} \|E\|_{\operatorname{curl}, \omega, \Omega} |\omega| \|c\|_{-1/2, \operatorname{div}, \Gamma},
\end{aligned}$$

sofern F_0 gemäß Lemma 4.2.1 gewählt ist. Mit den Beziehungen $E = -i\omega \operatorname{curl} B$ und $i\omega B = \operatorname{curl} E$ folgt $\|E\|_{\operatorname{curl}, \omega, \Omega} = \|B\|_{\operatorname{curl}, \omega, \Omega}$. $\square$

Analog zum Dirichlet–Neumann Operator N_{ω} aus der Analyse der Helmholtzgleichung sei T_{ω} der Operator, der das auf $n \times c$ abgebildete gegebene Datum $c \in H^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma)$ abbildet auf den Sprung der tangentialen Komponente des magnetischen Feldes B , also auf den Oberflächenstrom j , multipliziert mit $-i\omega$, d.h.

$$T_{\omega}(-n \times c) := -i\omega [n \times B]_{\Gamma}$$

Satz 4.2.2. Für $\operatorname{Im} \omega > 0$ definiert T_{ω} einen stetigen Isomorphismus von $H^{-1/2}(\operatorname{curl}, \Gamma)$ nach $H^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma)$, der der Abschätzung

$$\|T_{\omega}\| \leq C_{\sigma_0, \Gamma} |\omega|^3$$

genügt. T_{ω} ist ferner assoziiert zu einer elliptischen Bilinearform

$$\operatorname{Re} \langle T_{\omega}(-n \times c), -n \times c \rangle_{\Gamma} \geq C_{\sigma_0, \Gamma} \|c\|_{-1/2, \operatorname{div}, \Gamma}^2. \quad (4.5)$$

Beweis. Für $c \in H^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma)$ sei (E, B) die eindeutige schwache Lösung der Probleme (Q_{Ω}^{ω}) und $(Q_{\Omega'}^{\omega})$. Es gilt $(n \times c) \in H^{-1/2}(\operatorname{curl}, \Gamma)$ und $T_{\omega}(n \times c) \in H^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma)$. Es sei $\psi \in H^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma)$ beliebig und $G \in H(\operatorname{curl}, \Omega)$ gemäß dem Fortsetzungssatz gewählt, d.h. $n \times G = \psi$. Dann gilt $n \times \psi \in H^{-1/2}(\operatorname{curl}, \Gamma)$ und es folgt, wenn wie oben die Beziehungen zwischen E und B verwendet werden,

$$\begin{aligned}
\langle -i\omega n \times B, -n \times \psi \rangle_{\Gamma} &= -i\omega \int_{\Omega} \operatorname{curl} B \overline{G} \, dx + i\omega \int_{\Omega} B \operatorname{curl} \overline{G} \, dx \\
&= \int_{\Omega} (\operatorname{curl} E \operatorname{curl} \overline{G} - \omega^2 E \overline{G}) \, dx \\
&\leq \|E\|_{\operatorname{curl}, \omega, \Omega} \|G\|_{\operatorname{curl}, \omega, \Omega} \\
&\leq C_{\sigma_0, \Gamma} |\omega|^3 \|c\|_{-1/2, \operatorname{div}, \Gamma} \|n \times \psi\|_{-1/2, \operatorname{curl}, \Gamma}
\end{aligned}$$

und die gleiche Abschätzung gilt für Ω' . Damit folgt die Normabschätzung für T_ω aus der Abschätzung des Fortsetzungslemmas und Satz 4.2.1. Zum Nachweis der Elliptizität ist zunächst

$$\begin{aligned}
\langle -i\omega n \times B, -i\omega n \times c \rangle_\Gamma &= \langle -i\omega n \times B, -i\omega n \times n \times E \rangle_\Gamma \\
&= (-i\omega) \overline{(i\omega)} \left(\int_\Omega \operatorname{curl} B \overline{E} \, dx - \int_\Omega B \operatorname{curl} \overline{E} \, dx \right) \\
&= (-i\omega) \overline{(i\omega)} \left(\int_\Omega (i\omega E) \overline{E} \, dx - \int_\Omega \frac{1}{i\omega} \operatorname{curl} E \operatorname{curl} \overline{E} \, dx \right) \\
&= -\overline{(i\omega)} \left(\int_\Omega (-\omega^2) |E|^2 \, dx - \int_\Omega |\operatorname{curl} E|^2 \, dx \right) \\
&= (-i\omega) \int_\Omega |\omega|^2 |E|^2 \, dx - i\overline{\omega} \int_\Omega |\operatorname{curl} E|^2 \, dx
\end{aligned}$$

und somit

$$\operatorname{Re} \langle -i\omega n \times B, -i\omega n \times c \rangle = \sigma \|E\|_{\operatorname{curl}, \omega, \Omega}^2 \geq \sigma C \|c\|_{-1/2, \operatorname{div}, \Gamma}^2,$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Stetigkeit der Tangentialabbildung folgte.

Die Injektivität von T_ω folgt aus der Elliptizität. Mittels der Identität

$$\langle -i\omega n \times B, -n \times \psi \rangle_\Gamma = -i\omega \int_\Omega \operatorname{curl} B \overline{G} \, dx + i\omega \int_\Omega B \operatorname{curl} \overline{G} \, dx$$

läßt sich die Surjektivität nachweisen. □

4.3 Darstellung des elektrischen Feldes und Randintegralgleichung

In Kapitel 1 wurde eine Darstellung des elektrischen Feldes mittels Potentialen hergeleitet, die besagt, daß Funktionen $A \in C^1(\mathbb{R}_{>0}; H^1(\mathbb{R}^3)^3)$ und $\phi \in C^1(\mathbb{R}_{>0}; H^1(\mathbb{R}^3))$ existieren derart, daß

$$E = -\nabla \phi - \partial_t A \quad \text{und} \quad B = \operatorname{curl} A,$$

sofern $E, B \in C^1(\mathbb{R}_{>0}, L^2(\mathbb{R}^3)^3)$ gilt. Ferner wurde gezeigt, daß

$$\left[\frac{\partial A}{\partial n} \right]_\Gamma = -[n \times B]_\Gamma \quad \text{und} \quad \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_\Gamma = -[E \cdot n]_\Gamma$$

und A, ϕ sind Lösungen homogener Wellengleichungen, die sich im zeitharmonischen Fall mittels der Darstellungsformeln (2.24) und (2.23) schreiben lassen. Damit läßt sich die folgende Darstellungsformel für elektromagnetische Felder $\{E, B\}$ im zeitharmonischen Fall zeigen. Vereinfachend wird dabei für fixiertes $\omega \in \mathbb{C}$ die Fourier-Laplace-transformierte einer Funktion $f(x, t)$ als $f(x)$ geschrieben.

Satz 4.3.1. Sind $\{E, B\}$ Lösung von $(Q_{\Omega'}^\omega)$ und (Q_Ω^ω) so gilt für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$

$$E(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{i\omega j(y) e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} ds_y - \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int_\Gamma \frac{q(y) e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} ds_y, \quad (4.6)$$

$$B(x) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{curl} \int_\Gamma \frac{j(y) e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} ds_y, \quad (4.7)$$

und für $x \in \Gamma$

$$\frac{E_i(x) + E_e(x)}{2} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{i\omega j(y) e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} ds_y - \frac{1}{4\pi} \text{grad} \int_{\Gamma} \frac{q(y) e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} ds_y, \quad (4.8)$$

$$\frac{B_i(x) + B_e(x)}{2} = \frac{1}{4\pi} \text{curl} \int_{\Gamma} \frac{j(y) e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} ds_y, \quad (4.9)$$

wobei der Oberflächenstrom j und die -ladung q gegeben sind durch die Sprünge von $-n \times B$ und $-n \cdot E$ über Γ . j und q genügen der Ladungserhaltungsgleichung

$$i\omega q = \text{div}_{\Gamma} j. \quad (4.10)$$

Beweis. Die Aussage folgt ähnlich wie die Darstellungsformel der Helmholtzgleichung. $\square$

Mittels der Erhaltungsgleichung (4.10) läßt sich q aus (4.8) eliminieren. Um die Randbedingung $n \times E = c$ auf Γ zu berücksichtigen, wird die tangentielle Komponente von (4.8) betrachtet, d.h.

$$\begin{aligned} c &= i\omega n \times S_{\omega} j - n \times \text{grad} S_{\omega} q \\ &= i\omega n \times S_{\omega} j - \frac{1}{i\omega} n \times \text{grad} S_{\omega} \text{div}_{\Gamma} j. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dabei ist S_{ω} der Operator aus Kapitel 2, der hier auch auf vektorwertige Funktionen angewendet wird. In (4.11) wird nun j durch p mittels $p = i\omega j$ ersetzt, und noch einmal die tangentielle Komponente gebildet. Die zu lösende Gleichung für p lautet dann

$$R_{\omega} p = n \times c \quad (4.12)$$

mit dem Operator R_{ω} definiert vermöge

$$R_{\omega} p = -n \times (n \times S_{\omega} p) + \frac{1}{\omega^2} \text{grad}_{\Gamma} S_{\omega} (\text{div}_{\Gamma} p).$$

Dabei wurde benutzt, daß $n \times n \times \text{grad} = \text{grad}_{\Gamma}$ gilt. R_{ω} ist damit formal der inverse Operator vom oben analysierten Operator T_{ω} . R_{ω} hat insbesondere die folgenden Eigenschaften.

Satz 4.3.2. R_{ω} ist ein stetiger linearer Operator von $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$ in $H^{-1/2}(\text{curl}, \Gamma)$, dessen Operatornorm beschränkt ist durch

$$\|R_{\omega}\| \leq C_{\sigma, \Gamma} |\omega|.$$

Ferner ist R_{ω} der inverse Operator von T_{ω} und assoziiert zu einer elliptischen Bilinearform. Genauer gilt

$$\text{Re} \langle p, -i\omega R_{\omega} p \rangle_{\Gamma} \geq C_{\sigma, \Gamma} \frac{1}{|\omega|^2} |p|_{-1/2, \text{div}}^2 \quad (p \in H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)).$$

Beweis. Zu gegebenem glatten $c \in H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$ sei (E, B) die glatte Lösung der Probleme (Q_{Ω}^{ω}) und $(Q_{\Omega'}^{\omega})$. Für die Lösung zeigt die Darstellungsformel auf Γ dann $R_{\omega} p = -n \times c$, aufgrund der Dichtheit glatter Funktionen in $H(\text{curl}, \Omega)$ und $H(\text{curl}, \Omega')$ folgt dann $R_{\omega} T_{\omega} = \text{Id}$ auf $H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma)$.

Aufgrund der Bijektivität von T_ω folgt dann auch $T_\omega R_\omega = Id$ auf $H^{-1/2}(\text{curl}, \Gamma)$. Zur Abschätzung der Operatornorm von R_ω sei $p = T_\omega(-n \times c) = -i\omega[n \times B]$ für die Lösung (E, B) von (Q_Ω^ω) und $(Q_{\Omega'}^\omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle p, -i\omega R_\omega p \rangle_\Gamma &= \langle i\omega j, -i\omega(-n \times c) \rangle_\Gamma \\
&= \langle -i\omega[n \times B], -i\omega(-n \times c) \rangle_\Gamma \\
&= \langle -i\omega[n \times B], -i\omega(-n \times n \times E) \rangle_\Gamma \\
&= \langle -i\omega n \times B_i, -i\omega(-n \times n \times E) \rangle_\Gamma \\
&\quad + \langle -i\omega n \times B_e, -i\omega(-n \times n \times E) \rangle_\Gamma,
\end{aligned}$$

wobei hier $n \times B_i$ die Tangentialkomponente auf Γ von B in Ω bezeichnet und $n \times B_e$ die von B in Ω' . Dabei wurde wieder benutzt, daß die Normalen entgegengesetzt zueinander gerichtet sind. Für den ersten Ausdruck gilt

$$\begin{aligned}
\langle -i\omega n \times B_i, -i\omega(-n \times n \times E) \rangle_\Gamma &= \langle -i\omega n \times B_i, -i\omega(-n \times n \times E) \rangle_\Gamma \\
&= \int_\Omega \text{curl}(i\omega B) \overline{(i\omega E)} dx - \int_\Omega (i\omega B) \text{curl} \overline{(i\omega E)} dx \\
&= \int_\Omega (i\omega) \overline{(i\omega)} \text{curl} B \overline{E} dx - \int_\Omega (i\omega) \overline{(i\omega)} B \text{curl} \overline{E} dx \\
&= \int_\Omega (i\omega) \overline{(i\omega)} (-i\omega E) \overline{E} dx - \int_\Omega (i\omega) \overline{(i\omega)} \frac{1}{i\omega} \text{curl} E \text{curl} \overline{E} dx \\
&= (-i\omega) \int_\Omega |\omega E|^2 dx - \overline{(i\omega)} \int_\Omega |\text{curl} E|^2 dx \\
&= (-i\eta + \sigma) \int_\Omega |\omega E|^2 dx + (i\eta + \sigma) \int_\Omega |\text{curl} E|^2 dx
\end{aligned}$$

mit $\omega = \eta + i\sigma$. Dieselbe Gleichung folgt für Ω' anstelle von Ω und es folgt mit der Stetigkeit der Tangentialabbildung

$$\begin{aligned}
\text{Re } \langle p, -i\omega R_\omega p \rangle_\Gamma &= \sigma \|E\|_{\text{curl}, \Omega \cup \Omega', \omega}^2 \\
&\geq \sigma_0 C_\Gamma \|n \times c\|_{-1/2, \text{curl}, \Gamma}^2 \\
&= \|R_\omega p\|_{-1/2, \text{curl}, \Gamma}^2.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Umgekehrt gilt die Abschätzung

$$\text{Re } \langle p, -i\omega R_\omega p \rangle_\Gamma \leq |\omega| \|p\|_{-1/2, \text{div}, \Gamma} \|R_\omega p\|_{-1/2, \text{curl}, \Gamma}.$$

und es folgt

$$\|R_\omega p\|_{-1/2, \text{curl}, \Gamma} \leq C_{\sigma_0, \Gamma} |\omega| \|p\|_{-1/2, \text{div}, \Gamma},$$

also die behauptete Normabschätzung.

Zum Nachweis der Elliptizität muß in (4.13) die Norm von E nach unten durch die Norm von p abgeschätzt werden. Dazu sei $\phi \in H^{-1/2}(\text{curl}, \Gamma)$ und $u \in H(\text{curl}, \Omega \cup \Omega')$ so, daß $-n \times n \times u = \phi$

und $\|u\|_{\text{curl}, \Omega \cup \Omega', \omega} \leq C|\omega| \|\phi\|_{-1/2, \text{curl}, \Gamma}$, was aufgrund der Stetigkeit und Surjektivität der Abbildung $v \mapsto -n \times n \times v$ möglich ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}
| \langle p, \phi \rangle_\Gamma | &= | \langle -i\omega [n \times B], \phi \rangle_\Gamma | \\
&= \left| \int_{\Omega \cup \Omega'} i\omega \text{curl} B \bar{u} dx - \int_{\Omega \cup \Omega'} i\omega B \text{curl} \bar{u} dx \right| \\
&= \left| \int_{\Omega \cup \Omega'} \omega^2 E \bar{u} dx - \int_{\Omega \cup \Omega'} \text{curl} E \text{curl} \bar{u} dx \right| \\
&\leq \|E\|_{\text{curl}, \Omega \cup \Omega', \omega} \|u\|_{\text{curl}, \Omega \cup \Omega', \omega} \\
&\leq |\omega| \|E\|_{\text{curl}, \Omega \cup \Omega', \omega} \|\phi\|_{-1/2, \text{curl}, \Gamma},
\end{aligned}$$

also

$$\|E\|_{\text{curl}, \Omega \cup \Omega', \omega} \geq \frac{1}{|\omega|} \|p\|_{-1/2, \text{div}, \Gamma}.$$

In (4.13) folgt damit

$$\text{Re} \langle p, -i\omega R_\omega p \rangle_\Gamma \geq C_{\sigma_0, \Gamma} \frac{1}{|\omega|^2} \|p\|_{-1/2, \text{div}, \Gamma}^2.$$

□

4.4 Rücktransformation und Variationsformulierung

Im zeitabhängigen Fall läßt sich das elektromagnetische Feld darstellen durch die Formeln

$$E(x, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\partial_t j(y, t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y - \frac{1}{4\pi} \text{grad} \int_\Gamma \frac{q(y, t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y, \quad (4.14)$$

$$B(x, t) = \frac{1}{4\pi} \text{curl} \int_\Gamma \frac{j(y, t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, t \in \mathbb{R}_{>0} \quad (4.15)$$

und durch Übergang zu den Spuren auf Γ

$$\frac{E_i(x, t) + E_e(x, t)}{2} = -\frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\partial_t j(y, t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y - \frac{1}{4\pi} \text{grad} \int_\Gamma \frac{q(y, t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y, \quad (4.16)$$

$$\frac{B_i(x) + B_e(x)}{2} = \frac{1}{4\pi} \text{curl} \int_\Gamma \frac{j(y, t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y, \quad x \in \Gamma, t \in \mathbb{R}_{>0}, \quad (4.17)$$

wobei E_i und E_e die Spuren von $E|_\Omega$ bzw. $E|_{\Omega'}$ auf Γ bezeichnen. Mit der Ladungserhaltungsgleichung auf Γ ,

$$\partial_t q + \text{div}_\Gamma j = 0 \quad \text{oder} \quad q(t, \cdot) = \int_0^t \text{div}_\Gamma j(\cdot, \tau) d\tau, \quad (4.18)$$

kann das zeitabhängige Analogon zu R_ω definiert werden,

$$Rj = -n \times (n \times \partial_t S j) - \text{grad}_\Gamma S \left(\text{div}_\Gamma \int_0^t j(\tau) d\tau \right)$$

mit dem Operator S aus Kapitel 2. Es läßt sich zeigen, daß R unter der Fourier–Laplace Transformation in den Operator R_ω übergeht. Zwar ist der Operator R nicht bijektiv, es übertragen sich jedoch einige andere Eigenschaften von R_ω auf R . Die Beweise der folgenden Aussagen lassen sich anhand der Abschätzungen im zeitharmonischen Fall ähnlich wie in Abschnitt 2.4 durchführen.

Satz 4.4.1. Ist $c \in H_\sigma^2(0, \infty; H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma))$, $\sigma > 0$, so existiert genau ein $j \in H_\sigma^0(0, \infty; H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma))$ derart, daß $Rj = n \times c$. Für dieses j gilt ferner

$$|j|_{\sigma, 0, -1/2, \text{div}, \Gamma} \leq C_{\sigma_0, \Gamma} |c|_{\sigma, 2, -1/2, \text{div}, \Gamma} \quad (\sigma \geq \sigma_0 > 0).$$

Beweis. Die Argumentation erfolgt wie im Beweis von Satz 2.4.4. $\square$

Satz 4.4.2. Der Operator R bildet den Raum $H_\sigma^2(0, \infty; H^{-1/2}(\Gamma))$ stetig und linear ab in den Raum $H_\sigma^0(0, \infty; H^{-1/2}(\text{curl}, \Gamma))$. R definiert ferner eine elliptische Bilinearform auf $H_\sigma^1(0, \infty; H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma))$,

$$\int_0^\infty e^{-2\sigma t} \langle p(t), Rp(t) \rangle_\Gamma dt \geq C |p|_{\sigma, -1, -1/2, \text{div}, \Gamma}^2 \quad (4.19)$$

Beweis. Diese Aussage ergibt sich ebenfalls wie im Beweis von Satz 2.4.4. $\square$

Für gegebenes $c \in H_\sigma^2(0, \infty; H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma))$ erfüllt damit die Lösung $j \in H_\sigma^0(0, \infty; H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma))$ der Gleichung $Tj = n \times c$ die Variationsformulierung

$$B(h, j) = \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma h(x, t) n \times c(x, t) ds_x dt \quad (Q)$$

mit

$$B(h, j) = \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{h(x, t) \partial_t j(y, t - |x - y|)}{|x - y|} + \frac{\text{div}_\Gamma h(x, t) \text{div}_\Gamma j(y, t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y ds_x dt \quad (4.20)$$

für alle $h \in H_\sigma^1(0, \infty; H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma))$. Die Formulierung (4.20) kann ähnlich wie in Kapitel 2 diskretisiert werden (vergl. Kapitel 5) und führt auf ein endlich-dimensionales Problem $Q_{h, \Delta t}$. Aus der Elliptizität (4.19) ergibt sich ein Stabilitätskriterium.

Satz 4.4.3. Ist $c_{h, \Delta t}$ eine konsistente Approximation von c in $H_\sigma^2(0, \infty; H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma))$, so ist die diskrete Formulierung von (4.20) im folgenden Sinne stabil

$$|j_{h, \Delta t}|_{\sigma, -1/2, -1/2} \leq C$$

für $h, \Delta t \rightarrow 0$.

Beweis. Der Beweis erfolgt ähnlich wie im Fall der retardierten Potentialintegralgleichung, siehe Abschnitt 2.6.4. $\square$



Kapitel 5

Numerik der Feldintegralgleichung

5.1 Zerlegung der Feldintegralgleichung

Wie oben angedeutet, macht die retardierte Potentialintegralgleichung Algorithmen zur Bestimmung elektromagnetischer Streufelder instabil. Um dieses Problem zu illustrieren, wird zunächst eine vereinfachte Situation betrachtet. Dazu wird angenommen, daß die reflektierende Oberfläche eine flache Platte $P \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ ist. Diese Annahme vereinfacht die mathematische Formulierung, da die Oberflächendivergenz dem üblichen zweidimensionalen Divergenzoperator entspricht und die tangential Komponente eines Vektorfeldes $T = (T_1, T_2, T_3)$ relativ zur Oberfläche P bestimmt ist durch die ersten beiden Komponenten, d.h. $T_{tan} = (T_1, T_2, 0)$. Die Bedingung, daß der Oberflächenstrom tangential zur Oberfläche fließt, heißt in dieser Situation, daß die dritte Komponente verschwindet.

Da das eigentliche Interesse der Stabilität der Algorithmen gewidmet ist, scheinen die Annahmen, daß die Tangentialkomponente und die Oberflächendivergenz exakt bestimmt werden können, keine große Einschränkung zu sein. Wie üblich werden die skalierten Gleichungen betrachtet, in denen die Lichtgeschwindigkeit gleich eins ist.

Ein Algorithmus für achsenparallele Platten

Sind die Kanten von P parallel zu den Achsen, d.h. $P = [a, b] \times [c, d] \times \{0\}$, so läßt sich ein einfacher Algorithmus zur Bestimmung der Potentiale A und ϕ sowie des Oberflächenstroms j erregt durch ein einfallendes elektromagnetisches Feld $E^{inc} = (E_1^{inc}, E_2^{inc}, E_3^{inc})$ herleiten. Als weitere Vereinfachung sei P das Einheitsquadrat, d.h. $P = [-1/2, 1/2]^2 \times \{0\}$.

Mit dem vektorwertigen Potential

$$A_1(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_P \frac{j_1(y, t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y \quad (5.1)$$

$$A_2(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_P \frac{j_2(y, t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y \quad (5.2)$$

$$A_3(x, t) = 0 \quad x \in P, \quad (5.3)$$

und dem skalaren Potential ϕ , das zusammen mit A die Lorentz-Eichung

$$\frac{\partial}{\partial x_1} A_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} A_2 = -\frac{\partial}{\partial t} \phi \quad (5.4)$$

auf P erfüllt, lautet die elektrische Feldintegralgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \phi + \frac{\partial}{\partial t} A_1 = E_1^{inc} \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \phi + \frac{\partial}{\partial t} A_2 = E_2^{inc}. \quad (5.6)$$

Zusammen mit der Randbedingung, die besagt, daß der Strom tangential zum Rand von P fließt, d.h.

$$j \cdot \tilde{n} = 0 \quad \text{auf } \partial P$$

oder gleichbedeutend

$$j_1 = 0 \text{ auf } \{-1/2, 1/2\} \times [-1/2, 1/2] \times \{0\}, \quad j_2 = 0 \text{ auf } [-1/2, 1/2] \times \{-1/2, 1/2\} \times \{0\}, \quad (5.7)$$

und der Anfangsbedingung

$$j = A = \phi = 0, \quad t \leq 0. \quad (5.8)$$

sind die Funktionen A , ϕ und j dann durch (5.1)–(5.6) eindeutig bestimmt. Sind A und ϕ bekannt, so läßt sich das Streufeld bestimmen durch

$$E^{scat} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial}{\partial t} A$$

Für den Algorithmus von Rynne (siehe [RySm],[Da2]) wird die Oberfläche P uniform diskretisiert in N^2 Quadrate T_l mit Seitenlänge $1/N$. Die Kanten der Quadrate, die parallel zur x -Achse liegen, werden mit E_i^x bezeichnet, während die Kanten, die parallel zur y -Achse liegen, mit E_i^y bezeichnet werden. Es sei R_l die Menge der Quadrate mit Seitenlänge $1/N$, deren Ecken Mittelpunkte von Kanten E_i^x sind und S_l die Menge der Quadrate, die durch Mittelpunkte der Kanten E_i^y aufgespannt werden. Desweiteren sei Q_l die Menge der Quadrate mit Seitenlänge $1/N$, deren Ecken Mittelpunkte der Vierecke T_l sind (vergleiche Abbildung 5.1). Die Diskretisierung des Zeitintervalls $[0, T]$ erfolgt uniform mit Zeitschrittweite Δt . Die unbekannten Größen ϕ , A_1 und A_2 werden approximiert durch Funktionen, die stückweise auf Q_l , R_l bzw. T_l polynomial vom Grad kleiner oder gleich eins sind sowie global stetig im Ort und stückweise affin-linear, global stetig in der Zeit. Der Strom $j = (j_1, j_2, 0)$ wird approximiert durch Funktionen, die stückweise konstant sind auf achsenparallelen Quadraten, deren Mittelpunkte die Knoten in der Approximation von (A_1, A_2) sind. Auch für j wird die Approximation in der Zeit stückweise affin-linear, global stetig gewählt (vergl. Abb. 5.1).

Damit werden die verschiedenen physikalischen Größen auf unterschiedlichen Netzen approximiert. Die jeweiligen Netze stimmen nicht mit der Oberfläche $[-1/2, 1/2]^2 \times \{0\}$ überein, der Fehler in der Gebietsapproximation ist von der Ordnung $O(h)$ und damit im Hinblick auf die Approximationseigenschaften der retardierten Potentialintegralgleichung relativ klein.

Die Approximationen führen auf die folgenden diskreten Funktionen

$$a(x, t) = \sum_{n=0}^M \sum_i a_{(NM_{E_i^x})}^n \psi_n(t) \varphi_i^R(x)$$

für A_1 , wobei φ_i^R die nodalen Basisfunktionen für die Knoten der Triangulierung R_l sind, bezeichnet mit $M_{E_i^x}$,

$$b(x, t) = \sum_{n=0}^M \sum_i b_{(NM_{E_i^y})}^n \psi_n(t) \varphi_i^S(x)$$

für A_2 , wobei φ_i^S die nodalen Basisfunktionen für die Knoten der Triangulierung S_l sind, bezeichnet mit $M_{E_i^y}$,

$$c(x, t) = \sum_{n=0}^M \sum_i c_{(NM_{T_i})}^n \psi_n(t) \varphi_i^Q(x),$$

für ϕ , wobei φ_i^Q die nodalen Basisfunktionen für die Knoten der Triangulierung Q_l sind, bezeichnet mit M_{T_i} .

Gleichung (5.4) wird ausgewertet an Mittelpunkten der Quadrate T_l , Gleichung (5.5) an denen der

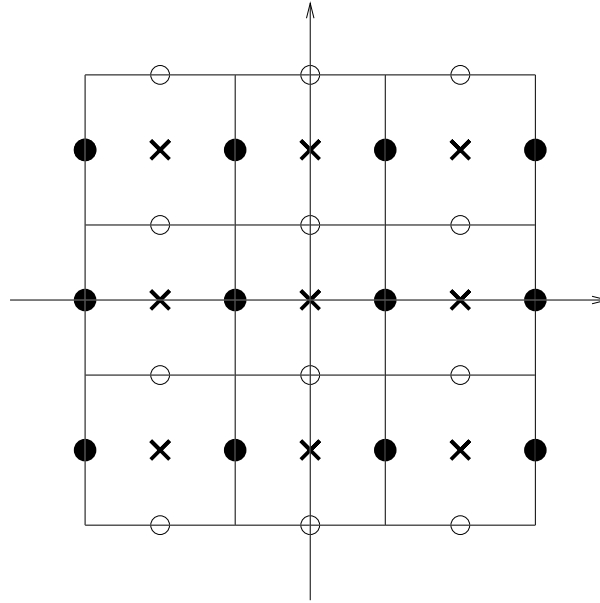


Abbildung 5.1 Versetzte Netze für das Einheitsquadrat $[-1/2, 1/2]^2$. Die Knoten in der Approximation von A_1 sind die gefüllten Kreise, für A_2 die offenen Kreise und für ϕ die Kreuze

Quadrate R_l und (5.6) an Mittelpunkten der Vierecke S_l . Die auftretenden zeitlichen Ableitungen werden approximiert durch zentrale Differenzen mit Schrittweite Δt und die örtlichen Ableitungen sind gegeben durch zentrale Differenzen, da die Ansatzfunktionen affin linear sind auf den jeweils betrachteten Kanten. Alle Gleichungen werden zu ganzzahligen Vielfachen der Zeitschrittweite Δt betrachtet. Insgesamt ergibt sich

$$c_{j-1/2, k-1/2}^n = c_{j-1/2, k-1/2}^{n-2} + 2r \left\{ (S_x^{-1} - 1) a_{j, k-1/2}^{n-1} + (S_y^{-1} - 1) b_{j-1/2, k}^{n-1} \right\} \quad (5.9)$$

für $1 - N/2 \leq j, k \leq N/2$,

$$a_{j,k-1/2}^n = a_{j,k-1/2}^{n-2} + 2\Delta t d_{j,k-1/2}^{n-1} + \frac{r}{2}(1 - S_x) \left\{ c_{j-1/2,k-1/2}^{n-2} + 2c_{j-1/2,k-1/2}^{n-1} + c_{j-1/2,k-1/2}^n \right\} \quad (5.10)$$

für $-N/2 \leq j \leq N/2$ und $1 - N/2 \leq k \leq N/2$ mit $d_{j,k-1/2}^{n-1} := E_1^{inc}(\frac{1}{N}(j, k - 1/2), (n-1)\Delta t)$, und

$$b_{j-1/2,k}^n = b_{j-1/2,k}^{n-2} + 2\Delta t e_{j-1/2,k}^{n-1} + \frac{r}{2}(1 - S_y) \left\{ c_{j-1/2,k-1/2}^{n-2} + 2c_{j-1/2,k-1/2}^{n-1} + c_{j-1/2,k-1/2}^n \right\} \quad (5.11)$$

für $1 - N/2 \leq j \leq N/2$ und $-N/2 \leq k \leq N/2$ mit $e_{j-1/2,k}^{n-1} := E_2^{inc}(\frac{1}{N}(j, k - 1/2), (n-1)\Delta t)$. Aus diesen Gleichungen können die Einträge der Vektoren A^n, ϕ^n , die nicht zu Basisfunktionen gehören deren Knoten auf dem Rand der Platte liegt, aus den Vektoren A^i, ϕ^i und E^{inc} , $i = n-2, n-1$ bestimmt werden. Die Funktionswerte A^n auf ∂P können mit Hilfe der retardierten Potentialintegralgleichungen bestimmt werden. In diesem Schritt werden von j_1^n, j_2^n nur auf $\{-1/2, 1/2\} \times [-1/2, 1/2]$ ($[-1/2, 1/2] \times \{-1/2, 1/2\}$) benötigt, verschwinden dort jedoch nach der Randbedingung (5.7).

Zur Bestimmung des Stroms j aus den retardierten Integralgleichungen (5.1), (5.2) werden drei verschiedene Ansätze im folgenden Algorithmus betrachtet.

Algorithmus 5.1.1. 1. Setze $A^i = \phi^i = j^i = 0$, $i \leq 0$.

2. Es seien alle physikalischen Größen bis zum Zeitpunkt $(n-1)\Delta t$ berechnet. Berechne A^n und ϕ^n im Innern der Platte mittels der Gleichungen (5.9)–(5.11).
3. Errechne A^n am Rand der Platte aus (5.1) und (5.2) mit j^{n-i} , $i \geq 1$, und mit Hilfe der Randbedingung (5.7) (nach einer Diskretisierung von (5.1) und (5.2) mit einer der unten erläuterten Methoden).
4. Berechne j^n aus A^i , $i \leq n$ aus (5.1) und (5.2).
5. Fahre fort mit 2.).

Kollokationsmethode zur Berechnung des Stroms. Ist A^n bekannt, so kann j^n bestimmt werden aus (5.1), (5.2) mit einer Kollokationsmethode für Quadrate ähnlich zu der in Abschnitt 3.1 vorgestellten. Insgesamt lassen sich zusammen mit den obigen Gleichungen alle unbekannten Größen berechnen.

Das System der partiellen Differentialgleichungen (5.4)–(5.6) ist von-Neumann stabil für Netzverhältnisse $r \in [0.4, 0.6]$, während die Methode der Diskretisierung der Integralgleichung nur stabil ist für Netzverhältnisse $r > 0.65$ (vergleiche [Da2]). Insgesamt ist der Algorithmus instabil für alle Netzverhältnisse. Eine Instabilität läßt sich für $r = 0.4$ beobachten im Beispiel mit $E^{inc} = (0, -\exp(-(t-3.4)^2), 0)$. Die Abbildungen 5.2 und 5.3 zeigen die Entwicklung einer solchen Instabilität.

Glättung des Stroms. In [Da2] wird im Algorithmus ein weiterer Schritt eingeführt, in dem eine zeitliche Mittelwertbildung des Stroms durchgeführt wird. Dieser Schritt verbessert die Stabilität des Verfahrens, da gewisse Instabilitäten herausgefiltert werden.

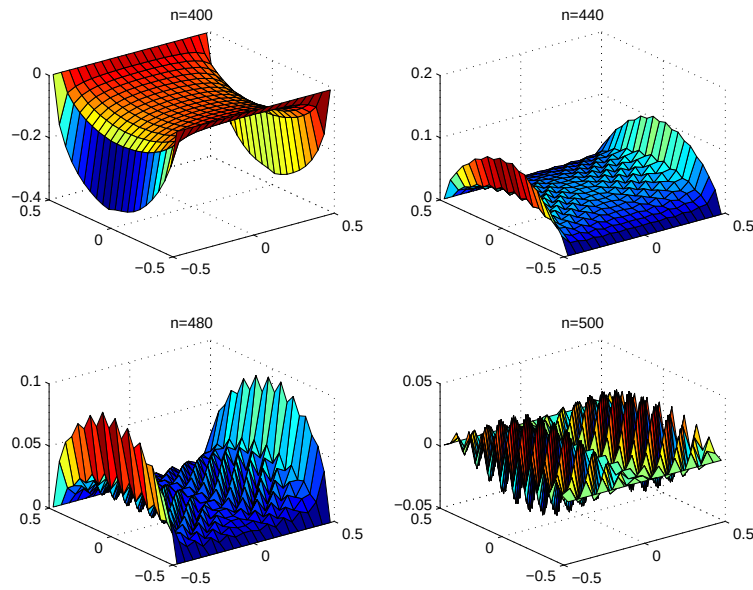


Abbildung 5.2 Entstehung einer Instabilität in der Approximation von j_2 bei Verwenden der Kollokationsmethode. Die Abbildungen zeigen die im Ort geglättete Lösung zu verschiedenen Zeitpunkten

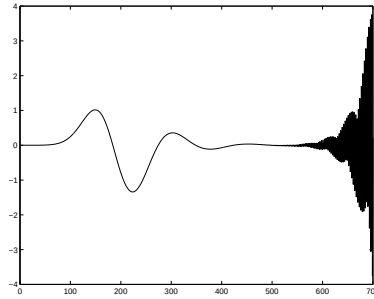


Abbildung 5.3 Die Approximation von j_2 nahe des Mittelpunktes der Platte wächst exponentiell

Die Mittelung erfolgt wie im Kapitel über die Numerik der retardierten Potentialintegralgleichung: Es seien alle Größen bis zum Zeitpunkt t^{n-1} berechnet. Dann wird der oben beschriebene Algorithmus (mit der Kollokationsmethode) zwei weitere Male durchgeführt, so daß $\tilde{j}^n$ und $\tilde{j}^{n+1}$ (im Algorithmus sei j durch $\tilde{j}$ ersetzt) bekannt sind. Der gemittelte Strom j^n wird dann berechnet aus

$$j^n = \frac{1}{4} (j^{n-1} + 2\tilde{j}^n + \tilde{j}^{n+1}).$$

Anschließend verfähre wie oben, mit der Annahme, daß alle Größen bis t^n bekannt sind.

Die Stabilität dieses Algorithmus kann ähnlich wie oben beschrieben mit einer Fourier-Analyse numerisch bewiesen werden. Die stabile Mittelungslösung des obigen Beispiels ist in Abbildung 5.4 dargestellt.

Galerkin-Methode zur Berechnung des Stroms Als dritte Möglichkeit zur Bestimmung des Stroms j^n werden die Integralgleichungen mittels der Galerkin-Methode aus Abschnitt 3.2 diskretisiert. Der daraus resultierende Algorithmus stabilisiert das Beispiel ebenfalls wie aus Abbildung 5.5 ersichtlich wird. Die Approximationslösungen J_2 aus der Mittelwertbildung und des Galerkin-Schemas im Intervall $n \in [1000, 1100]$ nahe des Mittelpunktes der Platte sind in Abbildung 5.6 dargestellt. Die Oszillationen in der Galerkin-Lösung sind etwa zehnmal so groß wie die der Mit-

5.2 Ein Galerkin–Schema für flache Platten

In diesem Abschnitt wird die elektrische Feldintegralgleichung für den Fall einer flachen Platte $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ behandelt. Dazu sei eine Triangulierung von Γ in Dreiecke $T \in \mathcal{T}$ zu einer approximierenden Oberfläche Γ_h gegeben. Zur Diskretisierung der Variationsformulierung (4.20) werden stückweise affin-lineare, global stetige Ansatzfunktionen sowohl in der Zeit, für eine uniforme Unterteilung des Intervalls $[0, T]$ mit Zeitschrittweite Δt , als auch im Ort verwendet. Die Bedingung, daß der zu bestimmende Oberflächenstrom j ein tangentes Vektorfeld ist, wird in der Definition des diskreten Raumes V_h realisiert,

$$V_h := \left\{ v \in H^{-1/2}(\Gamma_h, \operatorname{div}_{\Gamma_h}); v = \sum_{z \in \mathcal{N}} (c_{z,1}(\phi_z, 0, 0) + c_{z,2}(0, \phi_z, 0)), (c_{z,1}, c_{z,2})_{z \in \mathcal{N}} \in \mathbb{R}^{2 \times \operatorname{card} \mathcal{N}} \right\}.$$

Dabei bezeichnen ϕ_z die nodalen Basisfunktionen aus Abschnitt 3.7.1. Damit wird die Lösung des Variationsproblems $(Q_{h,\Delta t})$ im Raum

$$V_{h,\Delta t} = \left\{ f \in H_{\sigma}^1(0, \infty; V_h); f(x, t) = \sum_{i=0}^N \sum_{z \in \mathcal{N}} (c_{z,1}^i(\phi_z(x), 0, 0) + c_{z,2}^i(0, \phi_z(x), 0)) \beta_i(t), \right. \\ \left. (c_{z,1}^i, c_{z,2}^i)_{z \in \mathcal{N}} \in \mathbb{R}^{2 \times \operatorname{card} \mathcal{N}}, i = 1, \dots, N \right\}$$

gesucht.

Für den Fall einer offenen Oberfläche Γ_h ist die Forderung, daß der Strom tangential zum Rand von Γ_h fließt zu erfüllen. Dazu wird angenommen, daß sich $\partial \Gamma_h$ darstellen läßt als geschlossener Weg, der aus Kanten E von Elementen $T \in \mathcal{T}$ zusammengesetzt ist, d.h. es existieren Kanten $E_i = \operatorname{conv} \{z_i, z_{i+1}\}$ so, daß

$$\partial \Gamma_h = \bigcup_{i=1}^m E_i := \bigcup_{i=1}^{m-1} \operatorname{conv} \{z_i, z_{i+1}\} \cup \operatorname{conv} \{z_m, z_1\}.$$

Wegen der Stetigkeit von Funktionen $v \in V_h$ auf $\overline{\Gamma_h}$ ist nur noch die Bedingung $v \cdot t - v = 0$ auf $\partial \Gamma_h$, mit dem zu $\partial \Gamma_h$ tangentialen Vektor t sicherzustellen. Wird Γ_h als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ betrachtet, so existiert zu jeder Randkante E_i eine äußere Normale n_i und die Bedingung $v \cdot t - v = 0$ ist äquivalent zu $v \cdot n_i = 0$, $i = 1, \dots, m$. Für jeden Knoten z_i , $i = 1, \dots, m$ wird daher gefordert

$$v(z_i) \cdot n_i = 0, \quad v(z_i) \cdot n_{i-1} = 0 \quad (i = 2, \dots, m)$$

und

$$v(z_1) \cdot n_1 = 0, \quad v(z_1) \cdot n_m = 0.$$

Diese Forderungen werden in den numerischen Simulationen als Zwangsbedingung eingefügt.

Zur Diskretisierung der Bilinearform wird wieder ein typischer Beitrag $B(\beta_n \varphi_z, \beta_m \varphi_{z'})$ mit $\varphi_z \in$

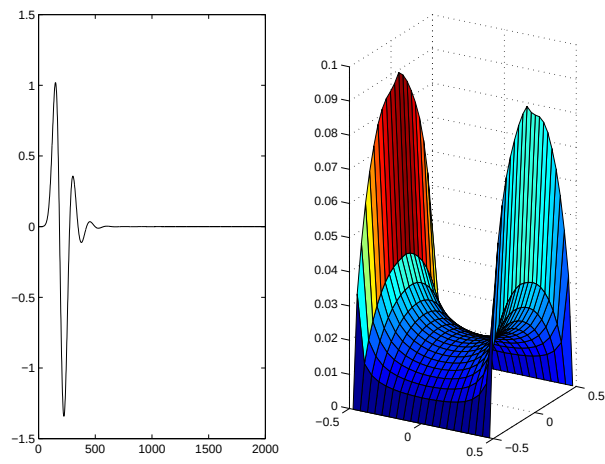


Abbildung 5.4 Resultate für die gemittelte Lösung. J_2 nahe des Mittelpunktes der Platte (links) und nach 480 Zeitschritten (rechts)

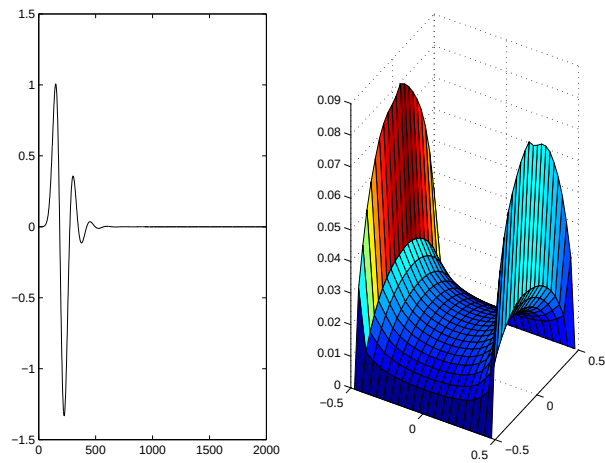


Abbildung 5.5 Resultate für die Galerkin-Lösung. J_2 am Zentrum (links) und nach 480 Zeitschritten (rechts)

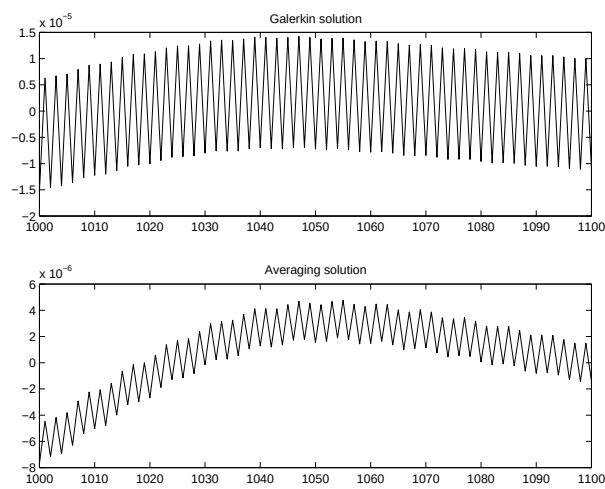


Abbildung 5.6 Vergleich von J_2 in der Nähe des Ursprungs

$\{(\phi_z, 0, 0), (0, \phi_z, 0)\}$ und $\varphi_{z'} \in \{(\phi_{z'}, 0, 0), (0, \phi_{z'}, 0)\}$ berechnet. Dabei ist die Dualität des Oberflächendivergenzoperators zum Oberflächengradienten der entscheidende Schritt in der Diskretisierung. Es gilt

$$\begin{aligned}
& B(\beta_n \varphi_z, \beta_m \varphi_{z'}) \\
&= \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \left(\int_{\Gamma_h} \left(\beta_n(t) \varphi_z(x) \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Gamma_h} \frac{\varphi_{z'}(y) \beta_m(t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \beta_n(t) \varphi_z(x) \operatorname{grad}_{\Gamma_h} \left(\int_{\Gamma_h} \int_0^{t-|x-y|} \operatorname{div}_{\Gamma_h} \beta_m(\tau) \varphi_{z'}(y) d\tau \frac{1}{|x - y|} ds_y \right) \right) ds_x \right) dt \\
&\approx 2\Delta t e^{-2\sigma t^n} \int_{\Gamma_h} \left(\varphi_z(x) \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Gamma_h} \frac{\varphi_{z'}(y) \beta_m(t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y \right) \right. \\
&\quad \left. - \varphi_z(x) \operatorname{grad}_{\Gamma_h} \left(\int_{\Gamma_h} \int_0^{t-|x-y|} \operatorname{div}_{\Gamma_h} \beta_m(\tau) \varphi_{z'}(y) d\tau \frac{1}{|x - y|} ds_y \right) \right) ds_x \\
&= 2\Delta t e^{-2\sigma t^n} \int_{\Gamma_h} \left(\varphi_z(x) \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Gamma_h} \frac{\varphi_{z'}(y) \beta_m(t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y \right) \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{div}_{\Gamma_h} \varphi_z(x) \left(\int_{\Gamma_h} \int_0^{t-|x-y|} \operatorname{div}_{\Gamma_h} \beta_m(\tau) \varphi_{z'}(y) d\tau \frac{1}{|x - y|} ds_y \right) \right) ds_x
\end{aligned}$$

Zur Berechnung der Integrale werden wieder die Träger $\omega_z = \bigcup_{j=1}^{k_z} T_j$ und $\omega_{z'} = \bigcup_{j=1}^{k_{z'}} T_j$ der Funktionen φ_z und $\varphi_{z'}$ betrachtet. Für zwei verschiedene Dreiecke $T \subset \operatorname{supp} \omega_z$ und $T' \subset \operatorname{supp} \omega_{z'}$ ergibt sich die Approximation

$$\begin{aligned}
& \int_T \varphi_z(x) \frac{\partial}{\partial t} \int_{T'} \frac{\beta_m(t^n - |x - y|) \varphi_{z'}(y)}{|x - y|} ds_y ds_x \\
&\approx \operatorname{gram} \Phi_T \sum_{i=1}^{N_{T,T'}} \omega_i \varphi_z(\Phi_T(\xi_i)) \frac{\partial}{\partial t} \int_{T'} \frac{\beta_m(t^n - |\Phi_T(\xi_i) - y|) \varphi_{z'}(y)}{|\Phi_T(\xi_i) - y|} ds_y \\
&\approx \operatorname{gram} \Phi_T \operatorname{gram} \Phi_{T'} \sum_{i=1}^{N_{T,T'}} \sum_{\kappa=1}^{L_{T,T'}} \omega_i \omega_\kappa \varphi_z(\Phi_T(\xi_i)) \frac{\beta'_m(t^n - |\Phi_T(\xi_i) - \Phi_{T'}(\xi_\kappa)|) \varphi_{z'}(\Phi_{T'}(\xi_\kappa))}{|\Phi_T(\xi_i) - \Phi_{T'}(\xi_\kappa)|}. \quad (5.12)
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet ξ_i einen Quadraturpunkt auf dem Referenzdreieck T_{ref} und ω_i ein zugehöriges Gewicht. Die Anzahl der Quadraturpunkte $N_{T,T'}$ bzw. $L_{T,T'}$ hängt dabei davon ab, ob die Dreiecke T und T' benachbart sind oder nicht. Die Funktionswerte $\beta'_m(t^n - |\Phi_T(\xi_i) - \Phi_{T'}(\xi_\kappa)|)$ sind gegeben durch

$$\beta'_m(t^n - |\Phi_T(\xi_i) - \Phi_{T'}(\xi_\kappa)|) = \begin{cases} 1/\Delta t, & \text{falls } t^n - |\Phi_T(\xi_i) - \Phi_{T'}(\xi_\kappa)| \in [(m-1)\Delta t, m\Delta t[\\ -1/\Delta t, & \text{falls } t^n - |\Phi_T(\xi_i) - \Phi_{T'}(\xi_\kappa)| \in [m\Delta t, (m+1)\Delta t[\\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Fall $T = T'$ wird wie bei der Diskretisierung der retardierten Potentialintegralgleichung eine angepaßte Quadraturformel höherer Ordnung verwendet. Damit sind in (5.12) nur die Laufindizes zu modifizieren.

Zur Berechnung des zweiten Beitrags in der Diskretisierung der Bilinearform ist zunächst

$$\int_0^{t^n - |\Phi_T(\xi_\iota) - \Phi_{T'}(\xi_\kappa)|} \beta_m(\tau) d\tau = \begin{cases} \Delta t, & \text{falls } t^n - |\Phi_T(\xi_\iota) - \Phi_{T'}(\xi_\kappa)| \geq (m+1)\Delta t, \\ \frac{\Delta t}{2}(2 - \epsilon^2), & \text{falls } t^n - |\Phi_T(\xi_\iota) - \Phi_{T'}(\xi_\kappa)| \in [m\Delta t, (m+1)\Delta t[\\ \quad \text{und } \epsilon = t^{m+1} - (t^n - |\Phi_T(\xi_\iota) - \Phi_{T'}(\xi_\kappa)|), \\ \frac{\Delta t}{2}(2\epsilon - \epsilon^2), & \text{falls } t^n - |\Phi_T(\xi_\iota) - \Phi_{T'}(\xi_\kappa)| \in [(m-1)\Delta t, m\Delta t[\\ \quad \text{und } \epsilon = t^m - (t^n - |\Phi_T(\xi_\iota) - \Phi_{T'}(\xi_\kappa)|), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit kann das Integral

$$\int_T \operatorname{div} \varphi_z x \int_{T'} \left(\int_0^{t^n - |x-y|} \beta_m(\tau) d\tau \right) \frac{\operatorname{div} \varphi_{z'}(y)}{|x-y|} ds_y ds_x$$

(hier wurde zum zweidimensionalen Divergenzoperator übergegangen) wie in (5.12) behandelt werden. Die Linearform der rechten Seite in der Formulierung $(Q_{h,\Delta t})$ wird zunächst mit einer Einpunktquadratur in der Zeit und einer Gaußschen Dreipunktquadratur im Ort behandelt. Insgesamt ergibt sich nach Teilen durch den Faktor $2\Delta t e^{-2\sigma t^n}$ ein Schema der Form

$$Q^0 U^n = b^n - \sum_{m=1}^{n-1} Q^m U^{n-m}$$

in dem im Gegensatz zur retardierten Potentialintegralgleichung aufgrund des Ersetzens der Ladungsdichte ρ durch $\int_0^t \operatorname{div} j d\tau$ alle Matrizen Q^m nicht verschwinden. Es existiert jedoch eine Zahl m_{max} die vom Durchmesser der betrachteten Oberfläche Γ abhängt, so daß gilt $Q^{m_{max}+k} = Q^{m_{max}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Die Matrizen Q^m lassen sich wie folgt elementweise assemblieren. Es seien T, T' zwei Dreiecke und ξ, ξ' zwei Quadraturpunkte auf T bzw. T' mit zugehörigen Gewichten ω und ω' . Weiter sei $T = \operatorname{conv}\{z_1, z_2, z_3\}$ und $T' = \operatorname{conv}\{z'_1, z'_2, z'_3\}$. Entsprechend den zwei iterierten Integralen in der Bilinearform definiere

$$A := \frac{\operatorname{gram} \Phi_T \operatorname{gram} \Phi_{T'} \omega \omega'}{|\xi - \xi'| \Delta t} \\ \times \begin{bmatrix} \phi_{z_1}(\xi) \phi_{z'_1}(\xi') & 0 & \phi_{z_1}(\xi) \phi_{z'_2}(\xi') & 0 & \phi_{z_1}(\xi) \phi_{z'_3}(\xi') & 0 \\ 0 & \phi_{z_1}(\xi) \phi_{z'_1}(\xi') & 0 & \phi_{z_1}(\xi) \phi_{z'_2}(\xi') & 0 & \phi_{z_1}(\xi) \phi_{z'_3}(\xi') \\ \phi_{z_2}(\xi) \phi_{z'_1}(\xi') & 0 & \phi_{z_2}(\xi) \phi_{z'_2}(\xi') & 0 & \phi_{z_2}(\xi) \phi_{z'_3}(\xi') & 0 \\ 0 & \phi_{z_2}(\xi) \phi_{z'_1}(\xi') & 0 & \phi_{z_2}(\xi) \phi_{z'_2}(\xi') & 0 & \phi_{z_2}(\xi) \phi_{z'_3}(\xi') \\ \phi_{z_3}(\xi) \phi_{z'_1}(\xi') & 0 & \phi_{z_3}(\xi) \phi_{z'_2}(\xi') & 0 & \phi_{z_3}(\xi) \phi_{z'_3}(\xi') & 0 \\ 0 & \phi_{z_3}(\xi) \phi_{z'_1}(\xi') & 0 & \phi_{z_3}(\xi) \phi_{z'_2}(\xi') & 0 & \phi_{z_3}(\xi) \phi_{z'_3}(\xi') \end{bmatrix}$$

und

$$B := \frac{\Delta t \text{gram } \Phi_T \text{gram } \Phi_{T'} \omega \omega'}{2|\xi - \xi'|} \times \begin{bmatrix} \partial_x \phi_{z_1} \partial_x \phi_{z'_1} & \partial_x \phi_{z_1} \partial_y \phi_{z'_1} & \partial_x \phi_{z_1} \partial_x \phi_{z'_2} & \partial_x \phi_{z_1} \partial_y \phi_{z'_2} & \partial_x \phi_{z_1} \partial_x \phi_{z'_3} & \partial_x \phi_{z_1} \partial_y \phi_{z'_3} \\ \partial_y \phi_{z_1} \partial_x \phi_{z'_1} & \partial_y \phi_{z_1} \partial_y \phi_{z'_1} & \partial_y \phi_{z_1} \partial_x \phi_{z'_2} & \partial_y \phi_{z_1} \partial_y \phi_{z'_2} & \partial_y \phi_{z_1} \partial_x \phi_{z'_3} & \partial_y \phi_{z_1} \partial_y \phi_{z'_3} \\ \partial_x \phi_{z_2} \partial_x \phi_{z'_1} & \partial_x \phi_{z_2} \partial_y \phi_{z'_1} & \partial_x \phi_{z_2} \partial_x \phi_{z'_2} & \partial_x \phi_{z_2} \partial_y \phi_{z'_2} & \partial_x \phi_{z_2} \partial_x \phi_{z'_3} & \partial_x \phi_{z_2} \partial_y \phi_{z'_3} \\ \partial_y \phi_{z_2} \partial_x \phi_{z'_1} & \partial_y \phi_{z_2} \partial_y \phi_{z'_1} & \partial_y \phi_{z_2} \partial_x \phi_{z'_2} & \partial_y \phi_{z_2} \partial_y \phi_{z'_2} & \partial_y \phi_{z_2} \partial_x \phi_{z'_3} & \partial_y \phi_{z_2} \partial_y \phi_{z'_3} \\ \partial_x \phi_{z_3} \partial_x \phi_{z'_1} & \partial_x \phi_{z_3} \partial_y \phi_{z'_1} & \partial_x \phi_{z_3} \partial_x \phi_{z'_2} & \partial_x \phi_{z_3} \partial_y \phi_{z'_2} & \partial_x \phi_{z_3} \partial_x \phi_{z'_3} & \partial_x \phi_{z_3} \partial_y \phi_{z'_3} \\ \partial_y \phi_{z_3} \partial_x \phi_{z'_1} & \partial_y \phi_{z_3} \partial_y \phi_{z'_1} & \partial_y \phi_{z_3} \partial_x \phi_{z'_2} & \partial_y \phi_{z_3} \partial_y \phi_{z'_2} & \partial_y \phi_{z_3} \partial_x \phi_{z'_3} & \partial_y \phi_{z_3} \partial_y \phi_{z'_3} \end{bmatrix}.$$

Dabei wurden bei B die Argumente, also die Quadraturpunkte, in den Ansatzfunktionen nicht mit angegeben, da die partiellen Ableitungen der stückweise affinen Funktionen stückweise konstant sind. Mit $m_{\xi, \xi'} = \lfloor |\xi - \xi'| / \Delta t \rfloor$ und $\epsilon_{\xi, \xi'} = m_{\xi, \xi'} - |\xi - \xi'| / \Delta t$ läßt sich mit den obigen Approximationen verifizieren, daß A Beiträge zu den Matrizen $Q^{m_{\xi, \xi'}}$ und $Q^{m_{\xi, \xi'}+1}$ liefert, während B geeignet zu den Matrizen $Q^{m_{\xi, \xi'}}, \dots, Q^{m_{max}}$ addiert wird. Bei einer Identifizierung der sechs Basisfunktionen auf den Dreiecken T und T' mit den Einträgen $z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,1}, z_{2,2}, z_{3,1}, z_{3,2}$ und $z'_{1,1}, z'_{1,2}, z'_{2,1}, z'_{2,2}, z'_{3,1}, z'_{3,2}$ in den Matrizen Q^m lautet die Assemblierung

$$\begin{aligned} & Q^{m_{\xi, \xi'}}([z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,1}, z_{2,2}, z_{3,1}, z_{3,2}], [z'_{1,1}, z'_{1,2}, z'_{2,1}, z'_{2,2}, z'_{3,1}, z'_{3,2}]) \\ &= Q^{m_{\xi, \xi'}}([z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,1}, z_{2,2}, z_{3,1}, z_{3,2}], [z'_{1,1}, z'_{1,2}, z'_{2,1}, z'_{2,2}, z'_{3,1}, z'_{3,2}]) + A, \\ & Q^{m_{\xi, \xi'}+1}([z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,1}, z_{2,2}, z_{3,1}, z_{3,2}], [z'_{1,1}, z'_{1,2}, z'_{2,1}, z'_{2,2}, z'_{3,1}, z'_{3,2}]) \\ &= Q^{m_{\xi, \xi'}+1}([z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,1}, z_{2,2}, z_{3,1}, z_{3,2}], [z'_{1,1}, z'_{1,2}, z'_{2,1}, z'_{2,2}, z'_{3,1}, z'_{3,2}]) - A, \\ & Q^{m_{\xi, \xi'}}([z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,1}, z_{2,2}, z_{3,1}, z_{3,2}], [z'_{1,1}, z'_{1,2}, z'_{2,1}, z'_{2,2}, z'_{3,1}, z'_{3,2}]) \\ &= Q^{m_{\xi, \xi'}}([z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,1}, z_{2,2}, z_{3,1}, z_{3,2}], [z'_{1,1}, z'_{1,2}, z'_{2,1}, z'_{2,2}, z'_{3,1}, z'_{3,2}]) + (2\epsilon_{\xi, \xi'} - \epsilon_{\xi, \xi'}^2)B, \\ & Q^{m_{\xi, \xi'}+1}([z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,1}, z_{2,2}, z_{3,1}, z_{3,2}], [z'_{1,1}, z'_{1,2}, z'_{2,1}, z'_{2,2}, z'_{3,1}, z'_{3,2}]) \\ &= Q^{m_{\xi, \xi'}+1}([z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,1}, z_{2,2}, z_{3,1}, z_{3,2}], [z'_{1,1}, z'_{1,2}, z'_{2,1}, z'_{2,2}, z'_{3,1}, z'_{3,2}]) + (2 - \epsilon_{\xi, \xi'}^2)B \quad \text{und} \\ & Q^k([z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,1}, z_{2,2}, z_{3,1}, z_{3,2}], [z'_{1,1}, z'_{1,2}, z'_{2,1}, z'_{2,2}, z'_{3,1}, z'_{3,2}]) \\ &= Q^k([z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,1}, z_{2,2}, z_{3,1}, z_{3,2}], [z'_{1,1}, z'_{1,2}, z'_{2,1}, z'_{2,2}, z'_{3,1}, z'_{3,2}]) + 2B \\ & \text{für } k = m_{\xi, \xi'} + 2, \dots, m_{max}. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.2.1. Die Randbedingung wurde in der Diskretisierung der Bilinearform in der Dualität von div_Γ und grad_Γ verwendet und sollte damit automatisch erfüllt sein. Aufgrund der schlechten Konvergenzresultate wird sie jedoch zusätzlich noch einmal explizit gestellt. Dies verbesserte in den numerischen Beispielen auch die Stabilität der Verfahren.

Numerische Ergebnisse. Für ein grobes Gitter zeigt Abbildung 5.7 die numerische Lösung nach 40 Zeitschritten des Beispiels aus dem vorigen Abschnitt auf dem Einheitsquadrat $[0, 1]^2 \times \{0\}$. Die Lösung erscheint qualitativ ähnlich der aus dem vorigen Abschnitt zu sein. Jedoch differiert die Lösung j_y nahe des Mittelpunktes stark von der aus dem vorigen Abschnitt wie Abbildung 5.8 zeigt. Es kann jedoch vermutet werden, daß die Oszillation in der Lösung eine langsam wachsende Instabilität ist.

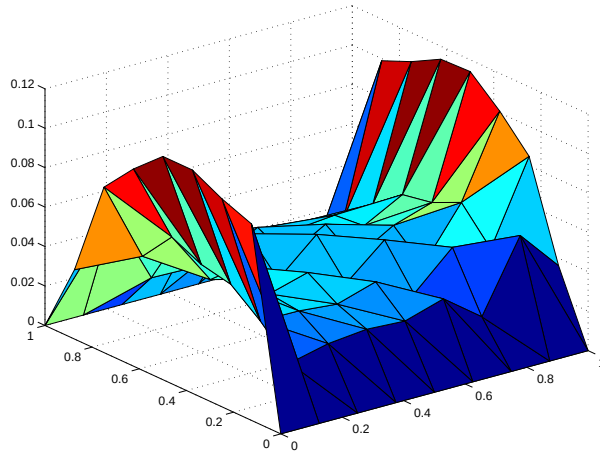


Abbildung 5.7 Zweite Komponente des Stroms nach 40 Zeitschritten

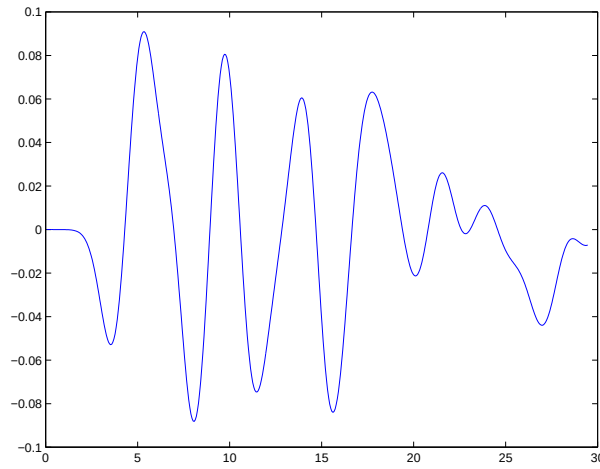


Abbildung 5.8 Lösung für das Galerkinschema der Feldintegralgleichung auf einer flachen Platten

5.3 Behandlung allgemeiner Oberflächen

Zur Behandlung der Feldintegralgleichung im Fall beliebiger, also im allgemeinen gekrümmter, Oberflächen Γ sei wieder eine Approximation Γ_h der betrachteten Oberfläche Γ mittels dreieckiger Facetten gegeben. Zur Approximation des Oberflächenstroms j werden in der Zeit stückweise affine, global stetige Ansatzfunktionen für eine uniforme Unterteilung des Zeitintervalls verwendet, während im Ort das vektorwertige Raviart–Thomas Element benutzt wird. Dieses Element erfüllt die Bedingung, daß der Strom tangential zur (approximierten) Oberfläche fließt, automatisch. Die Randbedingung für offene Oberflächen, daß der Strom entlang des Randes fließt, kann einfach implementiert werden, indem für Knoten, die auf dem Rand von Γ_h liegen, der Koeffizient gleich Null gesetzt wird, oder die entsprechende Basisfunktion aus dem Ansatzraum entfernt wird. Wesentlicher Vorteil des Elementes gegenüber anderen ist, daß die Oberflächendivergenz einfach berechenbar ist.

Für eine Triangulierung $\mathcal{T}$ von Γ in dreieckige Facetten bezeichne $\mathcal{E}$ die Menge der inneren Kanten E . Die Fläche eines Dreiecks $T \in \mathcal{T}$ sei mit $|T|$ bezeichnet, während für eine innere Kante $E \in \mathcal{E}$ die Länge der Kante mit l_E bezeichnet sei. Für jede innere Kante $E = T \cap T'$ sei eines der Dreiecke

als positiv bezüglich E festgelegt und das andere als negativ bezüglich E und diese seien, wenn klar ist, welche Kante betrachtet wird mit T_+ und T_- bezeichnet.

Definition 5.3.1 (Raviart–Thomas Element). Für eine innere Kante $E = T_+ \cap T_-$ seien v_- und v_+ die Ecken von T_- bzw. T_+ , die nicht auf E liegen. Eine Basisfunktion f_E ist dann definiert durch

$$f_E(x) = \begin{cases} \frac{l_E}{2|T_+|}(x - v_+), & \text{falls } x \in T_+, \\ \frac{l_E}{2|T_-|}(v_- - x), & \text{falls } x \in T_-, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

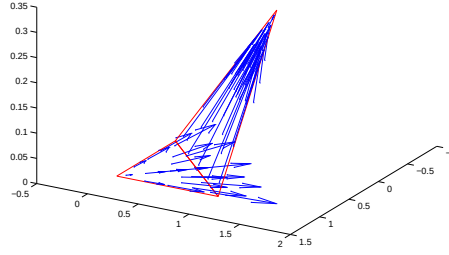


Abbildung 5.9 Beispiel einer Basisfunktion f_E

Die Basisfunktionen haben die folgenden Eigenschaften.

Lemma 5.3.1. a) Es sei $E \in \mathcal{E}$. Dann gilt

1. $f_E \cdot n = 0$, wobei n den Normalenvektor auf ein Dreieck $T \subset \mathbb{R}^3$ bezeichne;
2. $f_E \cdot (-n \times t) = 0$ auf ∂T für alle $T \in \mathcal{T}$, wobei t den Tangentialvektor zum Rand von T bezeichne und n die von T auf $\bar{T}$ fortgesetzte Normale ist;
3. für $x \in \Gamma_h$ ist

$$\operatorname{div}_{\Gamma_h} f_E(x) = \begin{cases} \frac{l_E}{|T_+|}, & \text{falls } x \in T_+, \\ \frac{-l_E}{|T_-|}, & \text{falls } x \in T_-, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Für flache Oberflächen $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ sind die Normalenkomponenten der Basisfunktionen stetig in den Kantenmittelpunkten und es gilt

$$\sum_{E \in \mathcal{E}} c_E f_E(e_j) \cdot t_{E_j} = c_{E_j},$$

sofern t_{E_j} im Tangentialraum der Oberfläche liegt sowie senkrecht auf E_j steht und von T_+ in T_- zeigt.

Beweis. a) Es sei $E \in \mathcal{E}$ beliebig gewählt mit zugehörigen Dreiecken T_+ und T_- . Für $x \notin T_+ \cup T_-$ sind die drei Aussagen offensichtlich. In den verbleibenden Fällen $x \in T_+$ oder $x \in T_-$ ist aufgrund der Konvexität von T_+ bzw. T_- der Vektor $(x - v_{\pm}) \in \text{span}\{t_1, t_2\}$, wobei t_1 und t_2 zwei linear unabhängige Tangentialvektoren von T_+ bzw. T_- sind. Damit folgt die erste Aussage unmittelbar. Ist $x \in \partial\Gamma \cap T_+$, so ist $(x - v_+)$ Vielfaches vom Tangentialvektor t zur Kante von T_+ , also $f_E(x) = \lambda t$. Damit folgt $n \perp t$ und $f_E \cdot (-n \times t) = 0$. Zum Nachweis der dritten Aussage sei $x \in T := T_+$ und $v := v_+$. Dann gilt auf T

$$\begin{aligned} \text{div}_{\Gamma_h} f_E(x) &= \text{curl}_{\Gamma_h}(f_E \times n) = -n \cdot \text{curl}(f_E \times n) \\ &= -\frac{l_E}{2|T|} n \cdot \text{curl}((x_2 - v_2)n_3 - (x_3 - v_3)n_2, (x_3 - v_3)n_1 - (x_1 - v_1)n_3, (x_1 - v_1)n_2 - (x_2 - v_2)n_1) \\ &= -\frac{l_E}{2|T|} n \cdot (-2n_1, -2n_2, -2n_3) = \frac{l_E}{|T|} |n|^2 = \frac{l_E}{|T|}. \end{aligned}$$

Für $x \in T_-$ folgt analog $\text{div}_{T_-} f_E = -\frac{|E|}{|T|}$.

b) Es gilt $f_E \cdot t_{E'} = \delta_{E,E'}$. Damit folgen die Behauptungen. $\square$

Die Lösung der Variationsformulierung wird nun im Raum

$$V_{h,\Delta t} = \left\{ \sum_{i=0}^N \sum_{E \in \mathcal{E}} c_{E,i} f_E(x) \beta_i(t); \quad c_{E,i} \in \mathbb{R} \right\}$$

gesucht. Zur Diskretisierung der Bilinearform wird wie im vorigen Abschnitt vorgegangen. Dabei besteht der Träger einer Basisfunktion f_E nur noch aus den zwei Dreiecken T_+ und T_- . Da hier auf jedem Dreieck nur drei Basisfunktionen nicht identisch verschwinden, sind die lokalen Matrizen in der Assemblierung von der Dimension 3×3 und lassen sich folgendermaßen berechnen. Es seien T und T' zwei Dreiecke und ξ, ξ' zwei Quadraturpunkte auf T bzw. T' mit Gewichten ω und ω' . Ferner seien $E_1, \dots, E_3$ die Kanten des Dreiecks von T und $E'_1, \dots, E'_3$ die des Dreiecks T' . Die Matrix

$$A := \frac{\text{gram } \Phi_T \text{ gram } \Phi_{T'} \omega \omega'}{|\xi - \xi'| \Delta t} \times \begin{bmatrix} f_{E_1}(\xi) f_{E'_1}(\xi') & f_{E_1}(\xi) f_{E'_2}(\xi') & f_{E_1}(\xi) f_{E'_3}(\xi') \\ f_{E_2}(\xi) f_{E'_1}(\xi') & f_{E_2}(\xi) f_{E'_2}(\xi') & f_{E_2}(\xi) f_{E'_3}(\xi') \\ f_{E_3}(\xi) f_{E'_1}(\xi') & f_{E_3}(\xi) f_{E'_2}(\xi') & f_{E_3}(\xi) f_{E'_3}(\xi') \end{bmatrix}$$

wird dann zur Teilmatrix $Q^{m_{\xi,\xi'}}([E_1, E_2, E_3], [E'_1, E'_2, E'_3])$ und multipliziert mit (-1) zur Teilmatrix $Q^{m_{\xi,\xi'}+1}([E_1, E_2, E_3], [E'_1, E'_2, E'_3])$ addiert, sofern die Numerierung der Matrixeinträge von Q^m mit den Mittelpunkten der Kanten identifiziert wird. Wieder ist $m_{\xi,\xi'} = \lfloor |\xi - \xi'| / \Delta t \rfloor$. Die Matrix

$$\begin{aligned} B &:= \frac{\Delta t \text{gram } \Phi_T \text{ gram } \Phi_{T'} \omega \omega'}{|\xi - \xi'|} \\ &\times \begin{bmatrix} \text{div}_{\Gamma_h} f_{E_1}|_T \text{div}_{\Gamma_h} f_{E'_1}|_{T'} & \text{div}_{\Gamma_h} f_{E_1}|_T \text{div}_{\Gamma_h} f_{E'_2}|_{T'} & \text{div}_{\Gamma_h} f_{E_1}|_T \text{div}_{\Gamma_h} f_{E'_3}|_{T'} \\ \text{div}_{\Gamma_h} f_{E_2}|_T \text{div}_{\Gamma_h} f_{E'_1}|_{T'} & \text{div}_{\Gamma_h} f_{E_2}|_T \text{div}_{\Gamma_h} f_{E'_2}|_{T'} & \text{div}_{\Gamma_h} f_{E_2}|_T \text{div}_{\Gamma_h} f_{E'_3}|_{T'} \\ \text{div}_{\Gamma_h} f_{E_3}|_T \text{div}_{\Gamma_h} f_{E'_1}|_{T'} & \text{div}_{\Gamma_h} f_{E_3}|_T \text{div}_{\Gamma_h} f_{E'_2}|_{T'} & \text{div}_{\Gamma_h} f_{E_3}|_T \text{div}_{\Gamma_h} f_{E'_3}|_{T'} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

wird

- multipliziert mit $(2\epsilon_{\xi,\xi'} - \epsilon_{\xi,\xi'}^2)$ zur Matrix $Q^{m_{\xi,\xi'}}([E_1, E_2, E_3], [E'_1, E'_2, E'_3])$, wobei $\epsilon_{\xi,\xi'} = |\xi - \xi'| / \Delta t - m_{\xi,\xi'}$,

- multipliziert mit $(2 - \epsilon_{\xi, \xi'}^2)$ zur Teilmatrix $Q^{m_{\xi, \xi'}+1}([E_1, E_2, E_3], [E'_1, E'_2, E'_3])$ und
- multipliziert mit 2 zu den Teilmatrizen $Q^k([E_1, E_2, E_3], [E'_1, E'_2, E'_3])$, $k = m_{\xi, \xi'} + 2, \dots, m_{max}$,

addiert.

Zur Verwaltung der Kanten und Elemente sei auf die Literatur nichtkonformer finiter Elementemethoden verwiesen (siehe beispielsweise [C]).

Numerische Ergebnisse. Der Algorithmus erweist sich trotz eines Mittelungsschrittes als extrem instabil wie Abbildung 5.10 zeigt.

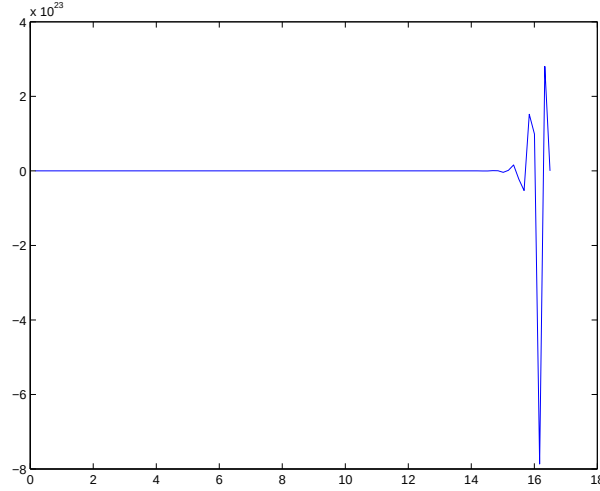


Abbildung 5.10 Instabile Lösung aus dem mit dem Raviart–Thomas diskretisierten Galerkinschema. Dabei ist $h = 1/4$ und $r = 1.4$

5.4 Ein verifizierter Algorithmus

Davies analysiert in [Da1] einen Algorithmus, der aus einer Kollokationsmethode wie in Abschnitt 5.1 resultiert. Der Algorithmus hat langsam wachsende Instabilitäten, die jedoch nur für sehr feine Netze sichtbar werden. Wieder wird ein System partieller Differentialgleichungen zusammen mit einer skalaren und einer vektorwertigen retardierten Potentialintegralgleichung betrachtet.

5.4.1 Betrachtete Gleichungen

Es werden wieder die Gleichungen betrachtet, in denen die Lichtgeschwindigkeit auf den Wert eins skaliert ist. Das vektorwertige und das skalare Potential A bzw. ϕ auf Γ sind durch den

Oberflächenstrom j und die Ladung ρ gegeben,

$$A(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{j(y, t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y \quad (5.13)$$

und

$$\phi(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\rho(y, t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y. \quad (5.14)$$

Der Strom und die Ladung erfüllen die Oberflächenladungserhaltungsgleichung auf Γ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_{\Gamma} j = 0 \quad (5.15)$$

während die Potentiale durch die elektrische Feldintegralgleichung auf Γ gekoppelt sind,

$$n \times \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{grad} \phi \right) = n \times E. \quad (5.16)$$

Dabei ist E das anliegende elektrische Feld.

Als Anfangsbedingung wird vorausgesetzt, daß alle physikalischen Größen verschwinden für alle Zeitpunkte $t \leq 0$. Als Randbedingung wird wieder gefordert, daß j ein tangentiales Vektorfeld ist und daß der Strom parallel zum Rand der Oberfläche fließt.

Das Problem besteht darin, den Oberflächenstrom j und die Oberflächenladung ρ zu approximieren. Das elektromagnetische Streufeld ergibt sich dann explizit aus der Identität

$$E^{scat}(x, t) = -\operatorname{grad} \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\rho(y, t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{j(y, t - |x - y|)}{|x - y|} ds_y. \quad (5.17)$$

5.4.2 Diskretisierung

Zur Diskretisierung der Gleichungen (5.13)–(5.16) wird angenommen, daß Γ mittels einer aus dreieckigen Facetten bestehenden Oberfläche Γ_h approximiert wird. Diese Triangulierung beinhalte N_T Dreiecke und N_E innere Elementkanten. Der Flächeninhalt und der Schwerpunkt eines Dreiecks T_k wird mit $|T_k|$ bzw. c_k bezeichnet, während die Länge und der Mittelpunkt einer inneren Kante E_j mit l_j und e_j bezeichnet werden.

Wie bei der Diskretisierung der Variationsformulierung der elektrischen Feldintegralgleichung soll das vektorwertige Raviart–Thomas Element verwendet werden. Dazu werden zwei Dreiecke, die eine gemeinsame Kante haben mit unterschiedlichen Vorzeichen bezüglich einer gemeinsamen Kante ausgestattet.

Bezeichnen $(f_j)_{j=1, \dots, N_E}$ die zu den inneren Kanten assoziierten Basisfunktionen, so wird der Strom approximiert durch eine Linearkombination dieser Funktionen, d.h.

$$j(x, t) \approx J(x, t) := \sum_{j=1}^{N_E} J_j(t) f_j(x). \quad (5.18)$$

Mit dieser Wahl der Approximation sind die Randbedingungen automatisch erfüllt. Die unbekannten Koeffizientenfunktionen $J_j(t)$ sind die Normalenkomponenten von $j(e_j, t)$.

Die Elementmittelpunkte sind die nodalen Punkte für die Ladungsdichte, die ihrerseits durch stückweise konstante Funktionen im Ort approximiert wird, d.h.

$$\rho(x, t) = \rho_k(t), \quad x \in T_k, \quad k = 1, \dots, N_T. \quad (5.19)$$

Die Diskretisierung in der Zeit erfolgt für alle betrachteten Größen durch stückweise affin-lineare Ansatzfunktionen für eine uniforme Diskretisierung des Zeitintervalls $[0, T]$ mit einer Zeitschrittweite Δt . Dabei wird

$$\Delta t \leq h_{min},$$

wobei h_{min} der kleinste Abstand zwischen den Mittelpunkten zweier benachbarter Dreiecke ist, vorausgesetzt. Diese Bedingung ist notwendig für die Stabilität der partiellen Differentialgleichungen (5.15) und (5.16). Wie oben sei $t^n := n\Delta t$, $\psi_i^n := \psi_i(t^n)$ und $\psi^n = (\psi_i^n)_i$ für eine Größe ψ .

5.4.3 Grundlegender Algorithmus

Zur Beschreibung des Algorithmus seien alle Größen bis einschließlich des Zeitpunktes t^{n-1} bekannt. Zunächst werden die unbekannten Koeffizienten ρ^n durch eine Diskretisierung der Gleichung (5.15) errechnet. Anschließend wird die Integralgleichung (5.14) zum Zeitpunkt t^n diskretisiert, um das skalare Potential zur Zeit t^n zu approximieren. Ist dieses bekannt, so kann Gleichung (5.16) verwendet werden, um das Vektorpotential A^n zu berechnen. Zusammen mit Gleichung (5.13) ergeben sich dann die Koeffizienten J^n aus einem linearen Gleichungssystem.

Es folgt eine kurze Beschreibung der Diskretisierung der Gleichungen.

Ladungserhaltungsgleichung

Für ein Dreieck T_k auf dessen Rand ∂T_k die inneren Kanten E_{k_i} , $i = 1, \dots, N_k$ ($1 \leq N_k \leq 3$) liegen, sei $\alpha_i := \text{div}_\Gamma f_{k_i}$. Werden die Approximationen von ρ und j in die Gleichung (5.15) eingesetzt, und ein zentraler Differenzenquotient zur Näherung der zeitlichen Ableitung verwendet, so ergibt sich

$$\rho_k^n = \rho_k^{n-2} - 2\Delta t \sum_{j=1}^{N_k} \alpha_j J_{k_j}^{n-1}, \quad k = 1, \dots, N_T. \quad (5.20)$$

Skalare Integralgleichung

Gleichung (5.14) wird verwendet, um das skalare Potential an den Mittelpunkten der Dreiecke auszurechnen. Dabei wird eine Dreipunktquadratur zur Approximation eines Integrals verwendet, sofern dieses keinen singulären Integranden hat. Im letzteren Fall wird das Zeitargument als konstant gleich dem am Mittelpunkt approximiert, und das resultierende einfachere Integral auf ein eindimensionales nichtsinguläres transformiert, das mit einer hohen Quadraturformel behandelt

wird. Diese Näherungen resultieren in den Gleichungen

$$\phi_k^n = \frac{1}{4\pi} \gamma_k \rho_k^n + \frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq k} \sum_{\kappa=1}^3 \omega_\kappa \frac{|T_i|}{|c_i - \xi_\kappa|} \rho_i(t^n - |c_i - \xi_\kappa|) \quad (5.21)$$

mit $\gamma_k := \int_{T_k} \frac{1}{|c_k - x|} ds_x$. Die Berechnung der Funktionswerte $\rho_i(t^n - |c_i - \xi_\kappa|)$ erfolgt durch Interpolation zwischen ganzzahligen Vielfachen der Zeitschrittweite Δt .

Elektrische Feldintegralgleichung

Die Feldintegralgleichung wird an Kantenmittelpunkten approximiert. Für eine innere Kante E_j seien T_+ und T_- die zwei Dreiecke mit $E_j = T_+ \cap T_-$ und $q_j^+ := e_j - c_+$ und $q_j^- := c_- - e_j$. Mit einer einfachen Approximation der tangentialen Komponente impliziert Gleichung (5.16) dann die Beziehung

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}(c_\pm, t) + \text{grad } \phi(c_\pm, t) \right) \cdot q_j^\pm = E(c_\pm, t) \cdot q_j^\pm \quad (5.22)$$

in $T_\pm$. Die Gradienten werden ersetzt durch die Differenzen

$$\text{grad } \phi(c_+, t) \cdot q_j^+ \approx \phi(e_j, t) - \phi(c_+, t)$$

und

$$\text{grad } \phi(c_-, t) \cdot q_j^- \approx \phi(c_-, t) - \phi(e_j, t).$$

Daraus folgt die räumliche Approximation

$$\frac{d\Psi_j}{dt}(t) = g_j(t) \quad (5.23)$$

mit

$$\Psi_j(t) = A(c_+, t) \cdot q_j^+ + A(c_-, t) \cdot q_j^-$$

und

$$g_j(t) = E(c_+, t) \cdot q_j^+ + E(c_-, t) \cdot q_j^- + \phi(c_+, t) - \phi(c_-, t).$$

Die Zeitdiskretisierung von (5.23) erfolgt dann durch eine semi-implizite Formel,

$$\Psi_j^n = \Psi_j^{n-2} + \frac{\Delta t}{2} (g_j^n + 2g_j^{n-1} + g_j^{n-2}). \quad (5.24)$$

Vektorwertige Integralgleichung

Die letzte Stufe des Algorithmus besteht darin, die vektorwertige Integralgleichung zum Zeitpunkt t^n zu diskretisieren.

Dazu werden die Koeffizienten Ψ^n in zwei Anteile aufgeteilt, einen singulären Ψ_S^n und einen nicht-singulären Ψ_N^n , insgesamt

$$\Psi^n = \Psi_S^n + \Psi_N^n, \quad (5.25)$$

wobei

$$\Psi_{S,j}^n = A_S^n(e_j) \cdot (q_j^+ + q_j^-) \quad (5.26)$$

und

$$\Psi_{N,j}^n = A_N^n(c_+) \cdot q_j^+ + A_N^n(c_-) q_j^-. \quad (5.27)$$

Hier resultieren A_N^n und A_S^n aus der Integralgleichung,

$$A_S^n(e_j) = \frac{1}{4\pi} \int_{T_+ \cup T_-} \frac{J(x, t^n)}{|x - e_j|} ds \quad (5.28)$$

bzw.

$$A_N^n(c_+) = \frac{1}{4\pi} \sum_{T_i \neq T_{\pm}} \sum_{\kappa=1}^3 \omega_{\kappa} \frac{|T_i|}{|c_+ - \xi_{\kappa}|} j(\xi_{\kappa}, t^n - |c_+ - \xi_{\kappa}|) \quad (5.29)$$

und

$$A_N^n(c_-) = \frac{1}{4\pi} \sum_{T_i \neq T_{\pm}} \sum_{\kappa=1}^3 \omega_{\kappa} \frac{|T_i|}{|c_- - \xi_{\kappa}|} j(\xi_{\kappa}, t^n - |c_- - \xi_{\kappa}|). \quad (5.30)$$

Die Gleichungen (5.27), (5.29) und (5.30) erlauben es, Ψ_N^n aus bekannten Größen zu errechnen. Aus (5.25) ergibt sich dann Ψ_S^n . Abschließend gestatten die Beziehungen (5.26) und (5.28) die Berechnung der noch unbekannten Koeffizienten J^n aus einem linearen Gleichungssystem $MJ^n = \Psi^n - \Psi_N^n$.

5.4.4 Modifikationen

Numerische Beispiele zeigen, daß der beschriebene Algorithmus instabil ist. Daher werden verschiedene Modifikationen eingeführt, um das Schema zu stabilisieren.

Glättung des Stroms in der Zeit

Wie oben wird die Lösung einen Schritt im Voraus berechnet, also für $n+1$, um dann den Koeffizientenvektor J^n zu ersetzen durch den Mittelwert

$$\frac{1}{4}(J^{n+1} + 2J^n + J^{n-1}).$$

Anschließend wird der schon berechnete Vektor Ψ^n noch einmal errechnet, d.h. $\Psi^n = MJ^n + \Psi_N^n$. Diese Glättung dämpft Instabilitäten hoher Frequenz.

Glättung des Stroms im Ort

Zur örtlichen Glättung des Stroms werden die Koeffizienten $J_j^n = J(e_j, t^n) \cdot n_E$ ersetzt durch den Mittelwert der Normalenkomponente des Stroms an den Mittelpunkten der zugehörigen Elemente, d.h. durch den Wert

$$\frac{1}{2}(J(c_+, t^n) \cdot n_+ + J(c_-, t^n) \cdot n_-).$$

Dabei ist $n_{\pm}$ die Normale zur Kante E_j , die im Tangentialraum des Dreiecks $T_{\pm}$ liegt und aus T_+ herauszeigt bzw. in T_- hineinzeigt.

Glättung der Ladungsdichte

Zur Glättung der Ladungsdichte ρ wird ein räumlicher Glättungsoperator $\mathcal{S}$ eingeführt. Dazu sei c der Schwerpunkt eines Dreiecks T und c_1, c_2 sowie c_3 seien die Mittelpunkte der Dreiecke, die eine gemeinsame mit T haben. Für eine stückweise stetige Funktion θ ist $\mathcal{S}\theta(c)$ dann definiert durch

$$\mathcal{S}\theta(c) := \frac{1}{2}\theta(c) + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^3 \theta(c_j).$$

Gleichung (5.20) im Algorithmus wird dann ersetzt durch die Formel

$$\rho_k^n = \rho_k^{n-2} - 2\Delta t \mathcal{S} \left(\sum_{i+1}^3 \alpha_i J_{k_i}^{n-1} \right). \quad (5.31)$$

Zusätzlich wird für $\epsilon \in [0, 1]$ der Operator $\mathcal{S}_{\epsilon}$ definiert durch

$$\mathcal{S}_{\epsilon} := \epsilon \mathcal{S} + (1 - \epsilon) \text{Id}.$$

Diese Glättung führt auf einen großen Fehler am Rand der Oberfläche.

Numerische Ergebnisse.

Die nachstehend gezeigten Beispiele liefern alle stabile Ergebnisse. Dabei ist jedoch stets ein ϵ geeignet zu wählen. Die schlechten Approximationen am Rand sind in Abbildung 5.12 deutlich zu erkennen.

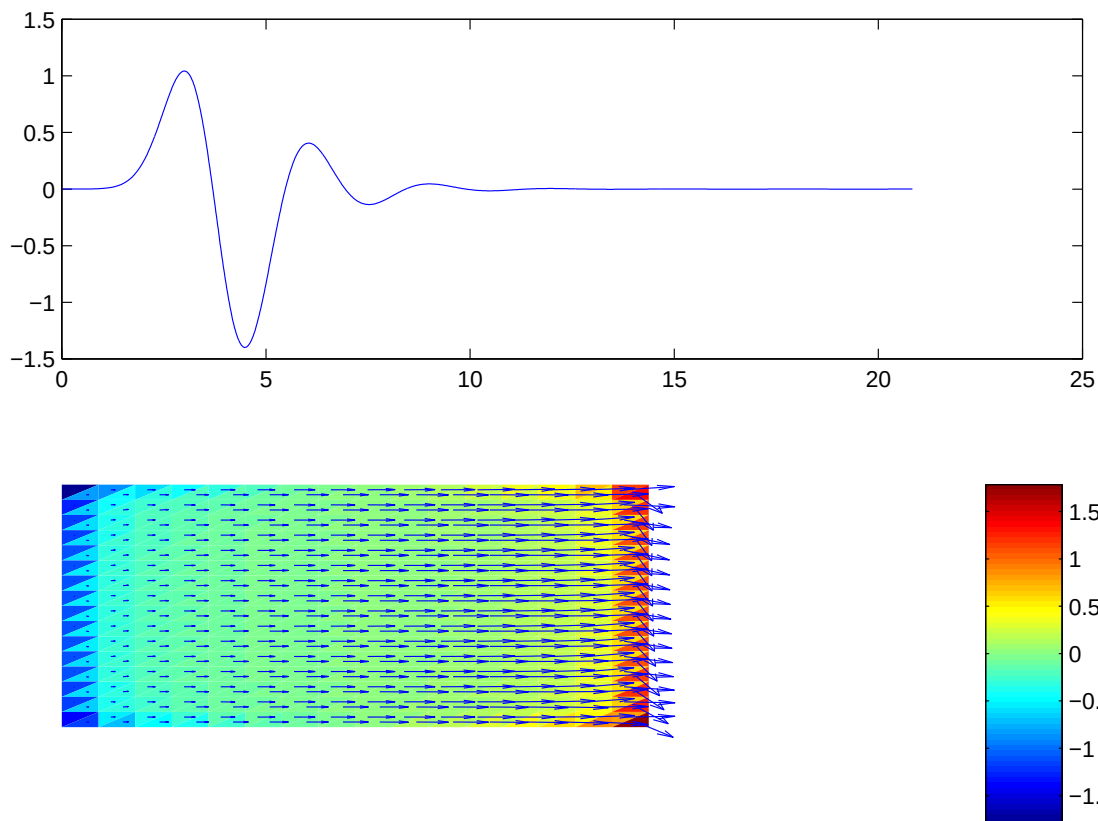


Abbildung 5.11 Zweite Komponente des Stroms am Mittelpunkt der Platte aufgetragen gegen die Zeit (oben) und Ladung (farbig) sowie Strom (Pfeile) nach 100 Zeitschritten für $h = 1/16$ und $\Delta t = h/3$ (unten) (Skalierungsfaktor für den Strom $s = 1/10$). Dabei wurde der Algorithmus mit allen Modifikationen und $\epsilon = 0.9$ verwendet

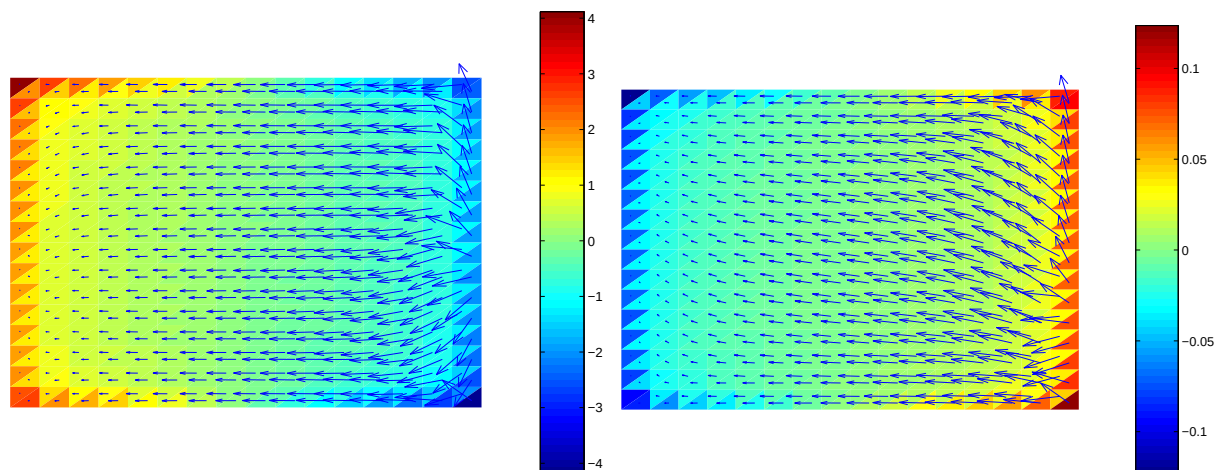


Abbildung 5.12 Ladung (farbig) sowie Strom (Pfeile) nach 250 (links) und 500 (rechts) Zeitschritten für $h = 1/16$ und $\Delta t = h/3$ (unten) (Skalierungsfaktor für den Strom $s = 1/10$). Dabei wurde der Algorithmus mit allen Modifikationen und $\epsilon = 0.9$ verwendet

Anhang A

A.1 Programm für die retardierte Potentialintegralgleichung

Als Beispiel für die numerische Approximation der Lösung der retardierten Potentialintegralgleichung mit stückweise konstanten Basisfunktionen im Ort und stückweise affin-linearen Ansatzfunktionen im Ort wird das Programm aus Abschnitt 3.6.6 für allgemeine Oberflächen betrachtet. Die verschiedenen Modifikationen lassen sich leicht durch Abänderungen realisieren.

A.1.1 Das Hauptprogramm

```
% numerical approximation of the scalar density in the retarded potential
% integral equation by piecewise constants in space and piecewise affine
% linear functions in time for arbitrary surfaces in 3 dimensions
clear
h = 0.05; % maximal mesh-size
delta_T = 1.0 * h * sqrt(2)/3; % time-step size
N = 300; % number of time steps
diam = 2; % diameter of the surface
m_max = floor(diam/delta_T); % maximal index for Q
U = sparse(N,size(elements,1));
% Quadrature formulae
[outer_quad,outer_weights,trans_inner,inner_weights] = quadraturen;
outer_weights = outer_weights/2;
trans_inner2 = [];
for j = 1 : size(outer_weights,2)
    trans_inner2 = [trans_inner2,trans_inner{j}];
end
% load triangulation
load coordinates.dat; coordinates(:,1) = [];
load elements.dat; elements(:,1) = [];
% calculate gramian determinants
for i = 1 : size(elements,1)
    gram(i) = sqrt(det([-1 1 0;-1 0 1] * coordinates(elements(i,:),:)*...
        coordinates(elements(i,:),:)' * [-1 -1;1 0;0 1]));
end
% calculate time-stepping matrices in C and LU-decomposition of Q{1}
clear Q;
[Q,Quad_points,MAX] = ...
    CellArray_surf(coordinates,elements,h,delta_T,m_max,outer_quad,...
        outer_weights,trans_inner2,inner_weights,gram);
[L,V] = lu(Q{1});
% time steps (with stabilization procedure)
n = 1;
b = zeros(size(elements,1),1);
b = gram' .* (reshape(ex_sol_dt(Quad_points,n*delta_T),3,...
    size(elements,1))' * [1 1 1]' / 6) - b;
U(n,:) = (V \ (L \ b))';
temp2 = zeros(size(elements,1),1);
for n = 3 : N+1
    b = zeros(size(elements,1),1);
```

```

    for l = 2 : min(n-1,MAX+1)
        b = b + Q{l+1}*U(n-l,:)' ;
    end
    b = gram' .* (reshape(ex_sol_dt(Quad_points,n*delta_T),3,...
        size(elements,1))' * [1 1 1]'/6) - b;
    temp1 = (V\ (L\ ( b - Q{2} * temp2) ) );
    U(n-1,:) = (temp1' + 2 * temp2' + U(n-2,:))/4;
    temp2 = (V\ (L\ ( b - Q{2} * U(n-1,:)' ) ) );
end
% Postprocessing
show_surface(elements,coordinates,U(N,:));

```

A.1.2 Die Unterprogramme

A.1.2.1 Berechnen der Quadraturformeln

In der Funktion `quadraturen.m` werden Transformationsmatrizen gemäß der Quadraturformeln aus Abschnitt 3.3 berechnet.

```

function [outer_quad,outer_weights,trans_inner_b,weights_inner_b] = quadraturen;
x_1 = 0.1127016654; x_2 = 0.5; x_3 = 1 - x_1;
inner_us = [x_1 x_1;x_2 x_1;x_3 x_1;x_1 x_2;x_2 x_2;x_3 x_2;...
            x_1 x_3;x_2 x_3;x_3 x_3];
inner_weights_us = [25 40 25 40 64 40 25 40 25]/324;
for i = 1 : size(inner_us,1)
    inner_quad(i,:) = [inner_us(i,1),inner_us(i,1)*inner_us(i,2)];
    inner_weights(i) = inner_us(i,1) * inner_weights_us(i);
end
[outer_weights,alpha,beta,gamma]=quadratur73;
trans_outer = [alpha',beta',gamma'];
outer_quad = trans_outer;
% Werte der Basisfunktionen in den Quad.pktn auf T_ref,2 fuer die sing Quad
trans_inner = zeros(size(inner_quad,1),3);
for i = 1 : size(inner_quad,1)
    trans_inner(i,:) = [1 - inner_quad(i,1),inner_quad(i,1)-inner_quad(i,2),...
        inner_quad(i,2)];
end
% Transformationen fuer die singulaeren Quadraturen
trans_inner_b = {1 : size(outer_quad,1)};
for i = 1 : size(outer_quad,1)
    trans_inner_b{i} = zeros(size(inner_quad,1),3);
end
weights_inner_b = zeros(size(outer_quad,1),size(inner_quad,1));
points_outer = trans_outer * [0 0;1 0;0 1];
for kappa = 1 : size(points_outer,1)
    points_inner = trans_inner * ...
        [points_outer(kappa,:);0,0;1,0];
    for iota = 1 : size(points_inner,1)
        trans_inner_b{kappa}(iota,:) = ...
            [1-points_inner(iota,1)-points_inner(iota,2),points_inner(iota,1),...
                points_inner(iota,2)];
        weights_inner_b(kappa,iota) = ...
            det([1,1,1;[points_outer(kappa,:);0,0;1,0]']) * inner_weights(iota);
    end
    points_inner = trans_inner * ...
        [points_outer(kappa,:);1,0;0,1];
    for iota = 1 : size(points_inner,1)
        trans_inner_b{kappa}(size(points_inner,1)+iota,:) = ...
            [1-points_inner(iota,1)-points_inner(iota,2),points_inner(iota,1),...
                points_inner(iota,2)];
    end
end

```



```

        weights_inner_b(kappa,size(points_inner,1)+iota) = ...
        det([1,1,1;[points_outer(kappa,:);1,0;0,1]']) * inner_weights(iota);
    end
    points_inner = trans_inner *...
    [points_outer(kappa,:);0,1;0,0];
    for iota = 1 : size(points_inner,1)
        trans_inner_b{kappa}(2 * size(points_inner,1)+iota,:) = ...
        [1-points_inner(iota,1)-points_inner(iota,2),points_inner(iota,1),...
        points_inner(iota,2)];
        weights_inner_b(kappa,2*size(points_inner,1)+iota) = ...
        det([1,1,1;[points_outer(kappa,:);0,1;0,0]']) * inner_weights(iota);
    end
end
end

```

Die Gaußsche 73-Punkt-Quadraturformel wird aus der Datei quadratur73.m gelesen.

```

function [Gewichte,alpha,beta,gamma]=quadratur73;
Gewichte=[0.032906331388919,...
0.010330731891272,0.010330731891272,0.010330731891272,...
0.022387247263016,0.022387247263016,0.022387247263016,...
0.030266125869468,0.030266125869468,0.030266125869468,...
0.030490967802198,0.030490967802198,0.030490967802198,...
0.024159212741641,0.024159212741641,0.024159212741641,...
0.016050803586801,0.016050803586801,0.016050803586801,...
0.008084580261784,0.008084580261784,0.008084580261784,...
0.002079362027485,0.002079362027485,0.002079362027485,...
0.003884876904981,0.003884876904981,0.003884876904981,...
0.003884876904981,0.003884876904981,0.003884876904981,...
0.025574160612022,0.025574160612022,0.025574160612022,...
0.025574160612022,0.025574160612022,0.025574160612022,...
0.008880903573338,0.008880903573338,0.008880903573338,...
0.008880903573338,0.008880903573338,0.008880903573338,...
0.016124546761731,0.016124546761731,0.016124546761731,...
0.016124546761731,0.016124546761731,0.016124546761731,...
0.002491941817491,0.002491941817491,0.002491941817491,...
0.002491941817491,0.002491941817491,0.002491941817491,...
0.018242840118951,0.018242840118951,0.018242840118951,...
0.018242840118951,0.018242840118951,0.018242840118951,...
0.010258563736199,0.010258563736199,0.010258563736199,...
0.010258563736199,0.010258563736199,0.010258563736199,...
0.003799928855302,0.003799928855302,0.003799928855302,...
0.003799928855302,0.003799928855302,0.003799928855302];
alpha=[1/3,0.020780025853987,0.090926214604215,0.197166638701138,...
0.488896691193805,0.645844115695741,0.779877893544096,...
0.888942751496321,0.974756272445543,0.003611417848412,...
0.134466754530780,0.014446025776115,0.046933578838178,...
0.002861120350567,0.223861424097916,0.034647074816760,...
0.010161119296278];
beta =[1/3,0.489609987073006,0.454536892697893,0.401416680649431,...
0.255551654403098,0.177077942152130,0.110061053227952,...
0.055528624251840,0.012621863777229,0.395754787356943,...
0.307929983880436,0.264566948406520,0.358539352205951,...
0.157807405968595,0.075050596975911,0.142421601113383,...
0.065494628082938];
gamma=[1/3,0.489609987073006,0.454536892697893,0.401416680649431,...
0.255551654403098,0.177077942152130,0.110061053227952,...
0.055528624251840,0.012621863777229,0.600633794794645,...
0.557603261588784,0.720987025817365,0.594527068955871,...
0.839331473680839,0.701087978926173,0.822931324069857,...
0.924344252620784];
abc=[alpha;beta;gamma];
tmp1=[1,2,2;2,1,2;2,2,1];
tmp2=perms(1:3);
quadr=zeros(3,73);
quadr(:,1)=abc(:,1);
quadr(:,2:25)=reshape(abc(tmp1(:,:),2:9),3,24);
quadr(:,26:73)=reshape(abc(tmp2(:,:)',10:17),3,48);
alpha=quadr(1,:);
beta=quadr(2,:);
gamma=quadr(3,:);

```

A.1.2.2 Assemblierung der Zeitschrittmatrizen

Die Assemblierung der Zeitschrittmatrizen erfolgt in der Programmiersprache *C*. Das nachfolgende Programm `CellArray_surf.c` kommuniziert mit dem MATLAB Programm über `mex`-Files.

```
#include <stdio.h>
#include <matrix.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include "ctype.h"
#include "string.h"
#include "mex.h"
#include "sparse.h"

void initieren(
    double Coordinates[], double Elements[],
    unsigned long int mC, unsigned long int mE,
    double gausspoints[]
)
{
    int i,k;
    int e[3];
    double x[3], y[3], z[3];
    for (k=0; k<mE; k++){
        for (i=0; i<3; i++){
            e[i] = Elements[k+i*mE];
            x[i] = Coordinates[e[i]-1];
            y[i] = Coordinates[e[i]-1+mC];
            z[i] = Coordinates[e[i]-1+2*mC];
        }
        gausspoints[(3*k)+0] = ( (4*x[0]) + x[1] + x[2] ) / 6;
        gausspoints[(3*k)+0+(3*mE)] = ( (4*y[0]) + y[1] + y[2] ) / 6;
        gausspoints[(3*k)+0+(6*mE)] = ( (4*z[0]) + z[1] + z[2] ) / 6;
        gausspoints[(3*k)+1] = ( x[0] + (4*x[1]) + x[2] ) / 6;
        gausspoints[(3*k)+1+(3*mE)] = ( y[0] + (4*y[1]) + y[2] ) / 6;
        gausspoints[(3*k)+1+(6*mE)] = ( z[0] + (4*z[1]) + z[2] ) / 6;
        gausspoints[(3*k)+2] = ( x[0] + x[1] + (4*x[2]) ) / 6;
        gausspoints[(3*k)+2+(3*mE)] = ( y[0] + y[1] + (4*y[2]) ) / 6;
        gausspoints[(3*k)+2+(6*mE)] = ( z[0] + z[1] + (4*z[2]) ) / 6;
    }
}

void CellArray(
    double Coordinates[], double Elements[],
    unsigned long int mC, unsigned long int mE,
    struct DMATRIX** Q,
    double h, double delta_T,
    double MAX[], double gausspoints[], double jacob[],
    int m_outer, int m_inner,
    double trans_outer[], double Trans_inner[],
    double inner_weights[], double outer_weights[]
)
{
    int m_loc;
    long int k,l,i,j,p,q,r;
    double wert,wert2, dist, eps_loc, outer_point_x, outer_point_y,
        outer_point_z, outer_point_x_2, outer_point_y_2,
        outer_point_z_2, outer_weight, outer_weight_2, inner_weight,
        inner_point_x, inner_point_y, inner_point_z, mpx_1, mpy_1,
        mpz_1, mpx_2, mpy_2, mpz_2, rho, sep;

    int e[3];
    double x[3], y[3], z[3], x_2[3], y_2[3], z_2[3];
    rho = 2 * h;
    for (k=0; k<mE; k++){
        for (p=0; p<3; p++){
            e[p] = Elements[k+p*mE];
            x[p] = Coordinates[e[p]-1];
            y[p] = Coordinates[e[p]-1+mC];
            z[p] = Coordinates[e[p]-1+2*mC];
        }
    }
}
```

```

mpx_1 = (x[0] + x[1] + x[2])/3;
mpy_1 = (y[0] + y[1] + y[2])/3;
mpz_1 = (z[0] + z[1] + z[2])/3;
for (l=0; l<k; l++){
    for (p=0; p<3; p++){
        e[p] = Elements[l+p*mE];
        x_2[p] = Coordinates[e[p]-1];
        y_2[p] = Coordinates[e[p]-1+mC];
        z_2[p] = Coordinates[e[p]-1+2*mC];
    }
    mpx_2 = (x_2[0] + x_2[1] + x_2[2])/3;
    mpy_2 = (y_2[0] + y_2[1] + y_2[2])/3;
    mpz_2 = (z_2[0] + z_2[1] + z_2[2])/3;
    sep = sqrt( (mpx_1 - mpx_2) * (mpx_1 - mpx_2) + (mpy_1 - mpy_2) *
        (mpy_1 - mpy_2) + (mpz_1 - mpz_2) * (mpz_1 - mpz_2));
    if (sep <= rho){
        for (q=0; q<m_outer; q++){
            outer_point_x = ( trans_outer[q] * x[0] + trans_outer[q+m_outer]
                * x[1] + trans_outer[q+2*m_outer] * x[2] );
            outer_point_y = ( trans_outer[q] * y[0] + trans_outer[q+m_outer]
                * y[1] + trans_outer[q+2*m_outer] * y[2] );
            outer_point_z = ( trans_outer[q] * z[0] + trans_outer[q+m_outer]
                * z[1] + trans_outer[q+2*m_outer] * z[2] );
            outer_weight = outer_weights[q];
            for (r=0; r<m_outer; r++){
                outer_point_x_2 = ( trans_outer[r] * x_2[0] + trans_outer[r+m_outer]
                    * x_2[1] + trans_outer[r+2*m_outer] * x_2[2] );
                outer_point_y_2 = ( trans_outer[r] * y_2[0] + trans_outer[r+m_outer]
                    * y_2[1] + trans_outer[r+2*m_outer] * y_2[2] );
                outer_point_z_2 = ( trans_outer[r] * z_2[0] + trans_outer[r+m_outer]
                    * z_2[1] + trans_outer[r+2*m_outer] * z_2[2] );
                outer_weight_2 = outer_weights[r];
                dist = sqrt( (outer_point_x_2 - outer_point_x) *
                    (outer_point_x_2 - outer_point_x) + (outer_point_y_2 - outer_point_y) *
                    (outer_point_y_2 - outer_point_y) + (outer_point_z_2 - outer_point_z) *
                    (outer_point_z_2 - outer_point_z) );
                m_loc = (int) (dist/delta_T);
                eps_loc = (dist/delta_T) - m_loc;
                dadd(Q[m_loc],k+1,l+1,jacob[k] * jacob[l] * outer_weight_2 *
                    outer_weight / (dist*delta_T));
                dadd(Q[m_loc+1],k+1,l+1,(-1)*jacob[k] * jacob[l] * outer_weight_2 *
                    outer_weight / (dist*delta_T));
            }
        }
    }
    else{
        for (i=0; i<3; i++){
            for (j=0; j<3; j++){
                dist = sqrt( (gausspoints[3*k+i]-gausspoints[3*l+j])
                    *(gausspoints[3*k+i]-gausspoints[3*l+j])+
                    (gausspoints[3*k+i+(3*mE)]-gausspoints[3*l+j+(3*mE)])
                    *(gausspoints[3*k+i+(3*mE)]-gausspoints[3*l+j+(3*mE)])+
                    (gausspoints[3*k+i+(6*mE)]-gausspoints[3*l+j+(6*mE)])
                    *(gausspoints[3*k+i+(6*mE)]-gausspoints[3*l+j+(6*mE)]));
                m_loc = (int) ( dist / delta_T);
                MAX[0] = m_loc > MAX[0] ? m_loc : MAX[0];
                eps_loc = dist / delta_T - m_loc;
                dadd(Q[m_loc],k+1,l+1,jacob[l]*jacob[k]/(36*dist*delta_T));
                dadd(Q[m_loc+1],k+1,l+1,(-1)*jacob[l]*jacob[k]/(36*dist*delta_T));
            }
        }
    }
}
for (l=(k+1); l<mE; l++){
    for (p=0; p<3; p++){
        e[p] = Elements[l+p*mE];

```

```

    x_2[p] = Coordinates[e[p]-1];
    y_2[p] = Coordinates[e[p]-1+mC] ;
    z_2[p] = Coordinates[e[p]-1+2*mC] ;
}
mpx_2 = (x_2[0] + x_2[1] + x_2[2])/3;
mpy_2 = (y_2[0] + y_2[1] + y_2[2])/3;
mpz_2 = (z_2[0] + z_2[1] + z_2[2])/3;
sep = sqrt((mpx_1-mpx_2)*(mpx_1-mpx_2)+(mpy_1-mpy_2)*(mpy_1 - mpy_2)
           + (mpz_1-mpz_2)*(mpz_1-mpz_2));
if (sep <= rho){
    for (q=0; q<m_outer; q++){
        outer_point_x = ( trans_outer[q] * x[0] + trans_outer[q+m_outer]
                          * x[1] + trans_outer[q+2*m_outer] * x[2] );
        outer_point_y = ( trans_outer[q] * y[0] + trans_outer[q+m_outer]
                          * y[1] + trans_outer[q+2*m_outer] * y[2] );
        outer_point_z = ( trans_outer[q] * z[0] + trans_outer[q+m_outer]
                          * z[1] + trans_outer[q+2*m_outer] * z[2] );
        outer_weight = outer_weights[q];
        for (r=0; r<m_outer; r++){
            outer_point_x_2 = ( trans_outer[r] * x_2[0] + trans_outer[r+m_outer]
                              * x_2[1] + trans_outer[r+2*m_outer] * x_2[2] );
            outer_point_y_2 = ( trans_outer[r] * y_2[0] + trans_outer[r+m_outer]
                              * y_2[1] + trans_outer[r+2*m_outer] * y_2[2] );
            outer_point_z_2 = ( trans_outer[r] * z_2[0] + trans_outer[r+m_outer]
                              * z_2[1] + trans_outer[r+2*m_outer] * z_2[2] );
            outer_weight_2 = outer_weights[r];
            dist = sqrt( (outer_point_x_2 - outer_point_x) *
                        (outer_point_x_2-outer_point_x)+(outer_point_y_2-outer_point_y)
                        *(outer_point_y_2-outer_point_y)+(outer_point_z_2-outer_point_z)
                        *(outer_point_z_2-outer_point_z));
            m_loc = (int) (dist/delta_T);
            eps_loc = (dist/delta_T) - m_loc;
            dadd(Q[m_loc],k+1,l+1, jacob[k] * jacob[l] * outer_weight_2 *
                outer_weight / (dist*delta_T));
            dadd(Q[m_loc+1],k+1,l+1,(-1)*jacob[k] * jacob[l] * outer_weight_2 *
                outer_weight / (dist* delta_T));
        }
    }
}
else{
    for (i=0; i<3; i++){
        for (j=0; j<3; j++){
            dist = sqrt( (gausspoints[3*k+i]-gausspoints[3*l+j])
                        *(gausspoints[3*k+i]-gausspoints[3*l+j])+
                        (gausspoints[3*k+i+(3*mE)]-gausspoints[3*l+j+(3*mE)])
                        *(gausspoints[3*k+i+(3*mE)]-gausspoints[3*l+j+(3*mE)])+
                        (gausspoints[3*k+i+(6*mE)]-gausspoints[3*l+j+(6*mE)])
                        *(gausspoints[3*k+i+(6*mE)]-gausspoints[3*l+j+(6*mE)]));
            m_loc = (int) ( dist / delta_T);
            MAX[0] = m_loc > MAX[0] ? m_loc : MAX[0];
            eps_loc = dist / delta_T - m_loc;
            dadd(Q[m_loc],k+1,l+1,jacob[l]*jacob[k]/(36*dist*delta_T));
            dadd(Q[m_loc+1],k+1,l+1,(-1)*jacob[l] * jacob[k]/(36*dist*delta_T));
        }
    }
}
}
}
for (k=0; k<mE; k++){
    for (p=0; p<3; p++){
        e[p] = Elements[k+p*mE];
        x[p] = Coordinates[e[p]-1];
        y[p] = Coordinates[e[p]-1+mC] ;
        z[p] = Coordinates[e[p]-1+2*mC] ;
    }
    for (q=0; q<m_outer; q++){

```

```

        outer_point_x = ( trans_outer[q] * x[0] + trans_outer[q+m_outer] * x[1]
                          + trans_outer[q+2*m_outer] * x[2] );
        outer_point_y = ( trans_outer[q] * y[0] + trans_outer[q+m_outer] * y[1]
                          + trans_outer[q+2*m_outer] * y[2] );
        outer_point_z = ( trans_outer[q] * z[0] + trans_outer[q+m_outer] * z[1]
                          + trans_outer[q+2*m_outer] * z[2] );
        outer_weight = outer_weights[q];
        for (r=0; r<m_inner; r++){
            inner_point_x = ( Trans_inner[q*m_inner*3+r] * x[0] +
                              Trans_inner[q*m_inner*3+r+m_inner] * x[1]
                              + Trans_inner[q*m_inner*3+r+2*m_inner] * x[2] );
            inner_point_y = ( Trans_inner[q*m_inner*3+r] * y[0] +
                              Trans_inner[q*m_inner*3+r+m_inner] * y[1]
                              + Trans_inner[q*m_inner*3+r+2*m_inner] * y[2] );
            inner_point_z = ( Trans_inner[q*m_inner*3+r] * z[0] +
                              Trans_inner[q*m_inner*3+r+m_inner] * z[1]
                              + Trans_inner[q*m_inner*3+r+2*m_inner] * z[2] );
            inner_weight = inner_weights[q + r*m_outer];
            dist = sqrt( (inner_point_x - outer_point_x) *
                        (inner_point_x - outer_point_x) +
                        (inner_point_y - outer_point_y) *
                        (inner_point_y - outer_point_y) +
                        (inner_point_z - outer_point_z) *
                        (inner_point_z - outer_point_z));
            m_loc = (int) (dist/delta_T);
            eps_loc = (dist/delta_T) - m_loc;
            dadd(Q[m_loc],k+1,k+1, jacob[k] * jacob[k] *
                inner_weight * outer_weight / (dist * delta_T));
            dadd(Q[m_loc+1],k+1,k+1,(-1) * jacob[k] * jacob[k] *
                inner_weight * outer_weight / (dist * delta_T));
        }
    }
}
return;
}
/* ----- */
/* ----   gateway function to matlab   ----- */
/* ----- */
void mexFunction(
    int nlhs,          mxArray *plhs[],
    int nrhs, const mxArray *prhs[]
)
{
    mxArray          **array_ptr;
    struct DMATRIX   **z;
    double            *Trans_inner;
    double            *x, *y, *s, *t, *u, *trans_outer,
                     *outer_weights, *inner_weights;
    unsigned int long m1,n1,m2,n2,m_outer,m_inner;
    int               k, NoMatrix;
    int N;
    double h, *jacob, *gausspoints, kappa, *MAX;
    /* Check for proper number of arguments */
    if (nrhs != 10) {
        mexErrMsgTxt("Only ten input arguments allowed.");
    } else if (nlhs != 3) {
        mexErrMsgTxt("Only three output argument allowed.");
    }
    m1 = mxGetM(prhs[0]);
    n1 = mxGetN(prhs[0]);
    m2 = mxGetM(prhs[1]);
    n2 = mxGetN(prhs[1]);
    x = mxGetPr(prhs[0]);
    y = mxGetPr(prhs[1]);
    s = mxGetPr(prhs[2]);
    t = mxGetPr(prhs[3]);
    u = mxGetPr(prhs[4]);

```

```

jacob = mxGetPr(prhs[9]);
trans_outer = mxGetPr(prhs[5]);
outer_weights = mxGetPr(prhs[6]);
Trans_inner = mxGetPr(prhs[7]);
inner_weights = mxGetPr(prhs[8]);
m_inner = 27;
m_outer = 73;
plhs[1] = mxCreateDoubleMatrix(3*m2,3,mxREAL);
gausspoints = mxGetPr(plhs[1]);
/* plhs[2] = mxCreateDoubleMatrix(1,m2,mxREAL);
jacob = mxGetPr(plhs[2]); */
plhs[2] = mxCreateDoubleMatrix(1,1,mxREAL);
MAX = mxGetPr(plhs[2]);
initieren(x, y, m1, m2, gausspoints);
MAX[0] = (int)(*u);
NoMatrix = ((int) MAX[0])+2;
MAX[0] = 0;
/* Create the output CellMatrix and load it into plhs[0]. */
plhs[0] = mxCreateCellMatrix(1,NoMatrix);
z = (struct DMATRIX **) mxCalloc(NoMatrix,sizeof(struct DMATRIX*));
for (k=0; k<NoMatrix; k++){
    z[k] = mxCalloc(1,sizeof(struct DMATRIX));
    dsparse(z[k],m2);
}
/* Do the actual computations in a subroutine */
CellArray(x, y, m1, m2, z, *s, *t, MAX, gausspoints,
    jacob, m_outer, m_inner, trans_outer, Trans_inner,
    inner_weights, outer_weights);
array_ptr = (mxArray **) mxCalloc(1,sizeof(mxArray*));
for (k=0; k<NoMatrix; k++){
    dsparse2matlab(z[k],array_ptr);
    mxSetCell(plhs[0],k,*array_ptr);
}
mxFree(z);
/* mxFree(array_ptr); */
}

```

A.1.3 Die rechte Seite

In den numerischen Beispielen wurden zwei verschiedene rechte Seiten betrachtet, die mit den Funktionen `a_dt.m` und `ex_sol_dt.m` berechnet wurden.

```

function y = a_dt(x,t);
y = (-20*t+50)*exp(-10*(t-2.5)^2) * ones(size(x,1),1);

```

```

function y = ex_sol(x,t);
val = zeros(size(x,1),4);
for j = 1 : size(x,1)
    x_1 = x(j,1);
    x_2 = x(j,2);
    a = zeros(1,4);
    b = zeros(1,4);
    a = [1-x_1,x_1,x_1,1-x_1];
    b = [1-x_2,1-x_2,x_2,x_2];
    for i = 1 : 4
        if a(i) == 0 | b(i) == 0
            val(j,i) = 0;
        elseif (t<=b(i)) & (t<=a(i))
            val(j,i) = pi * t/2;
        end
    end
end

```

```

elseif ((b(i)<t) & (t<=a(i)))
    val(j,i) = b(i) * log((t + sqrt(t^2-b(i)^2))/b(i)) + ...
        (pi/2 - acos(b(i)/t)) * t;
elseif ((a(i)<t) & (t<=b(i)))
    val(j,i) = a(i) * log((t + sqrt(t^2-a(i)^2))/a(i)) + ...
        (pi/2 - acos(a(i)/t)) * t;
elseif (t>a(i) & t>b(i) & t<=sqrt(a(i)^2+b(i)^2))
    val(j,i) = b(i) * log((t + sqrt(t^2-b(i)^2))/b(i)) +...
        a(i) * log((t + sqrt(t^2-a(i)^2))/a(i)) + ...
        (pi/2 - acos(b(i)/t) - acos(a(i)/t)) * t/2;
elseif (t>sqrt(a(i)^2+b(i)^2))
    val(j,i) = b(i) * log((sqrt(a(i)^2+b(i)^2) + a(i))/b(i)) +...
        a(i) * log((sqrt(a(i)^2+b(i)^2) + b(i))/a(i));
end
end
end
y=val(:,1)+val(:,2)+val(:,3)+val(:,4);

```

A.1.4 Ausgabe der Lösung

Die numerische Approximation kann mit Hilfe der Funktion `show_surface.m` grafisch dargestellt werden.

```

function show_surface(elements,coordinates,x)
X = reshape(coordinates(elements',1),size(elements,2),size(elements,1));
Y = reshape(coordinates(elements',2),size(elements,2),size(elements,1));
Z = reshape(coordinates(elements',3),size(elements,2),size(elements,1));
fill3(X,Y,Z,x);
shading flat;
view(110,30);
colorbar;

```

A.2 Programm zum Stabilitätstest

Beispielhaft ist nachstehend ein Programm zur Stabilitätsanalyse für die stückweise konstante Behandlung der retardierten Potentialintegralgleichung gezeigt.

```

% Fourier--test fuer P0-Galerkin--Schema ohne Int-schritt, Selfpatch
% analytisch oder approximiert
clear;
% h = 1; normiert
N = 100;
infty_norms = zeros(10,100);
delta_T = 1.3 * sqrt(2.0)/3.0 ;
M = floor(N * delta_T);
m_max = 4*ceil(sqrt(2) * M) + 20;
f = 10;
norms = zeros(f+1,f+1,N);
for frequ_one = 0 : f
    for frequ_two = 0 : f
        omega_1 = one/frequ_one * 2 * pi;
        omega_2 = two/frequ_two * 2 * pi;
        P = {1:m_max};
        Q = {1:m_max};
        for j = 1: m_max

```

```

    Q{j} = sparse(2,2);
    P{j} = sparse(2,2);
end
ii = sqrt(-1);
S_x = exp(-ii*omega_1);
S_y = exp(-ii*omega_2);
gausspoints_l = [2 1;5 1;5 2]/6;
gausspoints_u = [1 2;4 5;1 5]/6;
for k= 1 : M
    for l= -k+1 : k
        for i= 1 : 3
            for j= 1 : 3
% untere Dreiecke gegeneinander
                dist = norm(gausspoints_l(i,:)-gausspoints_l(j,:)-[k,l]);
                m_loc = floor( dist / delta_T);
                eps_loc = dist / delta_T - m_loc;
                Q{m_loc+1}(1,1) = Q{m_loc+1}(1,1) + (1-eps_loc) / (36 * dist) * S_x^k*S_y^l;
                Q{m_loc+2}(1,1) = Q{m_loc+2}(1,1)+ eps_loc / (36 * dist) * S_x^k*S_y^l;
                dist = norm(gausspoints_l(i,:)-gausspoints_l(j,:)-[-l,k]);
                m_loc = floor( dist / delta_T);
                eps_loc = dist / delta_T - m_loc;
                Q{m_loc+1}(1,1) = Q{m_loc+1}(1,1) + (1-eps_loc) / (36 * dist) * S_x^-l*S_y^k;
                Q{m_loc+2}(1,1) = Q{m_loc+2}(1,1)+ eps_loc / (36 * dist) * S_x^-l*S_y^k;
                dist = norm(gausspoints_l(i,:)-gausspoints_l(j,:)-[-k,-l]);
                m_loc = floor( dist / delta_T);
                eps_loc = dist / delta_T - m_loc;
                Q{m_loc+1}(1,1) = Q{m_loc+1}(1,1) + (1-eps_loc) / (36 * dist) * S_x^-k*S_y^-l;
                Q{m_loc+2}(1,1) = Q{m_loc+2}(1,1)+ eps_loc / (36 * dist) * S_x^-k*S_y^-l;
                dist = norm(gausspoints_l(i,:)-gausspoints_l(j,:)-[l,-k]);
                m_loc = floor( dist / delta_T);
                eps_loc = dist / delta_T - m_loc;
                Q{m_loc+1}(1,1) = Q{m_loc+1}(1,1) + (1-eps_loc) / (36 * dist) * S_x^l*S_y^-k;
                Q{m_loc+2}(1,1) = Q{m_loc+2}(1,1)+ eps_loc / (36 * dist) * S_x^l*S_y^-k;
% obere Dreiecke gegeneinander
                dist = norm(gausspoints_u(i,:)-gausspoints_u(j,:)-[k,l]);
                m_loc = floor( dist / delta_T);
                eps_loc = dist / delta_T - m_loc;
                Q{m_loc+1}(2,2) = Q{m_loc+1}(2,2) + (1-eps_loc) / (36 * dist) * S_x^k*S_y^l;
                Q{m_loc+2}(2,2) = Q{m_loc+2}(2,2)+ eps_loc / (36 * dist) * S_x^k*S_y^l;
                dist = norm(gausspoints_u(i,:)-gausspoints_u(j,:)-[-l,k]);
                m_loc = floor( dist / delta_T);
                eps_loc = dist / delta_T - m_loc;
                Q{m_loc+1}(2,2) = Q{m_loc+1}(2,2) + (1-eps_loc) / (36 * dist) * S_x^-l*S_y^k;
                Q{m_loc+2}(2,2) = Q{m_loc+2}(2,2)+ eps_loc / (36 * dist) * S_x^-l*S_y^k;
                dist = norm(gausspoints_u(i,:)-gausspoints_u(j,:)-[-k,-l]);
                m_loc = floor( dist / delta_T);
                eps_loc = dist / delta_T - m_loc;
                Q{m_loc+1}(2,2) = Q{m_loc+1}(2,2) + (1-eps_loc) / (36 * dist) * S_x^-k*S_y^-l;
                Q{m_loc+2}(2,2) = Q{m_loc+2}(2,2)+ eps_loc / (36 * dist) * S_x^-k*S_y^-l;
                dist = norm(gausspoints_u(i,:)-gausspoints_u(j,:)-[l,-k]);
                m_loc = floor( dist / delta_T);
                eps_loc = dist / delta_T - m_loc;
                Q{m_loc+1}(2,2) = Q{m_loc+1}(2,2) + (1-eps_loc) / (36 * dist) * S_x^l*S_y^-k;
                Q{m_loc+2}(2,2) = Q{m_loc+2}(2,2)+ eps_loc / (36 * dist) * S_x^l*S_y^-k;
% obere von T_ref gegen untere auf T_l,k
                dist = norm(gausspoints_l(i,:)-gausspoints_u(j,:)-[k,l]);
                m_loc = floor( dist / delta_T);
                eps_loc = dist / delta_T - m_loc;
                Q{m_loc+1}(2,1) = Q{m_loc+1}(2,1) + (1-eps_loc) / (36 * dist) * S_x^k*S_y^l;
                Q{m_loc+2}(2,1) = Q{m_loc+2}(2,1)+ eps_loc / (36 * dist) * S_x^k*S_y^l;
                dist = norm(gausspoints_l(i,:)-gausspoints_u(j,:)-[-l,k]);
                m_loc = floor( dist / delta_T);
                eps_loc = dist / delta_T - m_loc;
                Q{m_loc+1}(2,1) = Q{m_loc+1}(2,1) + (1-eps_loc) / (36 * dist) * S_x^-l*S_y^k;
                Q{m_loc+2}(2,1) = Q{m_loc+2}(2,1)+ eps_loc / (36 * dist) * S_x^-l*S_y^k;
                dist = norm(gausspoints_l(i,:)-gausspoints_u(j,:)-[-k,-l]);

```



```

m_loc = floor( dist / delta_T);
eps_loc = dist / delta_T - m_loc;
Q{m_loc+1}(2,1) = Q{m_loc+1}(2,1) + (1-eps_loc) / (36 * dist) * S_x^-k*S_y^-l;
Q{m_loc+2}(2,1) = Q{m_loc+2}(2,1) + eps_loc / (36 * dist) * S_x^-k*S_y^-l;
dist = norm(gausspoints_l(i,:)-gausspoints_u(j,:)-[1,-k]);
m_loc = floor( dist / delta_T);
eps_loc = dist / delta_T - m_loc;
Q{m_loc+1}(2,1) = Q{m_loc+1}(2,1) + (1-eps_loc) / (36 * dist) * S_x^l*S_y^-k;
Q{m_loc+2}(2,1) = Q{m_loc+2}(2,1) + eps_loc / (36 * dist) * S_x^l*S_y^-k;
end
end
end
for i= 1 : 3
    for j= 1 : 3
        dist = norm(gausspoints_l(i,:)-gausspoints_u(j,:)) ;
        m_loc = floor( dist / delta_T);
        eps_loc = dist / delta_T - m_loc;
        Q{m_loc+1}(2,1) = Q{m_loc+1}(2,1) + (1-eps_loc) / (36 * dist);
        Q{m_loc+2}(2,1) = Q{m_loc+2}(2,1) + eps_loc / (36 * dist);
    end
end
% Q{1}(1,1) = Q{1}(1,1) + 2 * 1.203614;
% Q{1}(2,2) = Q{1}(2,2) + 2 * 1.203614;
[outer_quad,outer_weights,trans_inner,inner_weights] = quadraturen;
outer_weights = outer_weights/2;
Koordinaten = [0 0;1 0;1 1];
outer_points = outer_quad * Koordinaten;
for r = 1 : size(outer_points,1)
    inner_points = trans_inner{r} * Koordinaten;
    for s = 1 : size(inner_points,1)
        dist = norm(outer_points(r,:)-inner_points(s,:));
        m_loc = floor(dist/delta_T);
        eps_loc = dist/delta_T - m_loc;
        Q{m_loc+1}(1,1) = Q{m_loc+1}(1,1) + (1-eps_loc) * ...
            outer_weights(r) * inner_weights(r,s) / dist;
        Q{m_loc+2}(1,1) = Q{m_loc+2}(1,1) + eps_loc * ...
            outer_weights(r) * inner_weights(r,s) / dist;
        Q{m_loc+1}(2,2) = Q{m_loc+1}(2,2) + (1-eps_loc) * ...
            outer_weights(r) * inner_weights(r,s) / dist;
        Q{m_loc+2}(2,2) = Q{m_loc+2}(2,2) + eps_loc * ...
            outer_weights(r) * inner_weights(r,s) / dist;
    end
end
for l = 1 : m_max
    Q{1}(1,2) = Q{1}(2,1);
end
M_norm(1) = 1;
P{1} = eye(2);
for n = 1 : N-1
    b = zeros(2,2);
    for m = 0 : n-1
        b = b + Q{n-m+1}*P{m+1};
    end
    P{n+1} = - Q{1} \ b;
    M_norm(n+1) = norm(P{n+1},inf);
end
% subplot(f+1,f+1,one*(f+1)+two+1);
% plot([1:N],log(M_norm));
norms(one+1,two+1,:) = M_norm;
end

```

A.3 Programm für die elektrische Feldintegralgleichung

Das folgende Programm realisiert den in Abschnitt 5.4 vorgestellten Algorithmus von Davies. Hier in einer Implementation für gekrümmte Oberflächen.

A.3.1 Das Hauptprogramm

```
% algorithm for the general surface scattering
% initialize
fein = 20;
h = 1/fein;
N = 300;
epsilon = 0.9;
% erzeuge Gitter
diam = 2;
delta_T = h/3;
m_max = floor(diam/delta_T);
[Elemente,Koordinaten,Neumann,N1]=GraduiertesQuadrat(fein,fein,1,1);
Koordinaten = [Koordinaten,zeros(size(Koordinaten,1),1)];
% Netzspezifische Informationen
[Kantenrnr,Elemente] = GeneriereKantenrnr(Elemente,Koordinaten);
areas = Flaecheninhalte(Elemente,Koordinaten);
[tangs,mp_pm,mp_edges,els2edge,edges2els,ggue,edge_lengths,Vorzeichen,...
    divergences,Kantenenden] = ...
    edges_and_elements(Koordinaten,Elemente,Kantenrnr,areas);
normalen = normals(Elemente,Koordinaten,Kantenrnr,Kantenenden,els2edge,...
    Vorzeichen);
% Verschiedene time--stepping Matrizen berechnen
Q = sca_RPIE(Elemente,Koordinaten,areas,delta_T,m_max,h);
[R,points,MAX] = CellArray_vec_rpie(Koordinaten,Elemente,h,delta_T,...
    m_max,Kantenrnr,edge_lengths,...
    Vorzeichen,ggue,mp_edges,mp_pm,edges2els,els2edge);
for j = 1 : m_max + 2
    R{j} = R{j}/(pi);
    R{j}(:,[max(max(Kantenrnr))+1:6*max(max(Kantenrnr))]) = [];
end
Mt = vec_RPIE_sing(Koordinaten,Elemente,Kantenrnr,edges2els,els2edge,...
    Kantenenden,mp_edges,ggue,edge_lengths,Vorzeichen,areas);
q = tangs([1:2:2*max(max(Kantenrnr)),:] + tangs([2:2:2*max(max(Kantenrnr))],:));
M = sparse(max(max(Kantenrnr)),max(max(Kantenrnr)));
for j = 1 : max(max(Kantenrnr))
    M(j,:) = (q(j,1) * Mt(3*j-2,:) + q(j,2) * Mt(3*j-1,:) + q(j,3) * Mt(3*j,:));
end
% freie Kanten heraussuchen
maske = zeros(max(max(Kantenrnr)),1);
I = diag(Kantenrnr(Neumann(:,1),Neumann(:,2)));
maske(I) = ones(size(I,1),1);
freieKanten = find(~maske);
% Loesungsvektoren initialisieren
rho = zeros(size(Elemente,1),N);
phi = zeros(size(Elemente,1),N);
Psi = zeros(max(max(Kantenrnr)),N);
Psi_N = zeros(max(max(Kantenrnr)),N);
Psi_S = zeros(max(max(Kantenrnr)),1);
g = zeros(max(max(Kantenrnr)),N);
J = zeros(max(max(Kantenrnr)),N);
A_N = zeros(6*max(max(Kantenrnr)),1);
A_S = zeros(3*max(max(Kantenrnr)),1);
% Zeitschritte, n= 1 gesondert behandeln
n = 1;
```

```

g(:,n) = sum((E(mp_pm([1:2:2*max(max(Kantenr))],:),n*delta_T) .* ...
    tangs([1:2:2*max(max(Kantenr))],:))')' ...
    + sum((E(mp_pm([2:2:2*max(max(Kantenr))],:),n*delta_T) .* ...
    tangs([2:2:2*max(max(Kantenr))],:))')');
Psi(:,n) = (delta_T/2) * g(:,n);
Psi_S = Psi(:,n);
J(freieKanten,n) = M(freieKanten,freieKanten) \ Psi_S(freieKanten);
% n = 2; auch gesonderte Behandlung
n = 2;
rho(:,n) = - 2 * delta_T * divergences * J(:,n-1);
phi(:,n) = Q{1}*rho(:,n);
g(:,n) = sum((E(mp_pm([1:2:2*max(max(Kantenr))],:),n*delta_T) .* ...
    tangs([1:2:2*max(max(Kantenr))],:))')' ...
    + sum((E(mp_pm([2:2:2*max(max(Kantenr))],:),n*delta_T) .* ...
    tangs([2:2:2*max(max(Kantenr))],:))')' ...
    + Vorzeichen * phi(:,n);
Psi(:,n) = (delta_T/2) * (g(:,n) + 2*g(:,n-1));
for l = 0 : 1
    A_N = A_N + R{1+1}*J(:,n-1);
end
Psi_N = sum([A_N([1:6:6*max(max(Kantenr))]),...
    A_N([2:6:6*max(max(Kantenr))]),...
    A_N([3:6:6*max(max(Kantenr))])]' ...
    .* tangs([1:2:2*max(max(Kantenr))],:))')' + ...
    sum([A_N([4:6:6*max(max(Kantenr))]),...
    A_N([5:6:6*max(max(Kantenr))]),...
    A_N([6:6:6*max(max(Kantenr))])]' ...
    .* tangs([2:2:2*max(max(Kantenr))],:))')');
A_N = zeros(6*max(max(Kantenr)),1);
Psi_S = Psi(:,n) - Psi_N;
J(freieKanten,n) = M(freieKanten,freieKanten) \ Psi_S(freieKanten);
for n = 3 : N-1
    filt_charge = charge_filtering(Elemente,divergences * J(:,n-1),...
        edges2els,els2edge,epsilon);
rho(:,n) = rho(:,n-2) - 2 * delta_T * filt_charge';
for l = 1 : min(n-1,m_max+1)
    phi(:,n) = phi(:,n) + Q{1+1}*rho(:,n-1);
end
phi(:,n) = phi(:,n) + Q{1}*rho(:,n);
g(:,n) = sum((E(mp_pm([1:2:2*max(max(Kantenr))],:),n*delta_T) .* ...
    tangs([1:2:2*max(max(Kantenr))],:))')' ...
    + sum((E(mp_pm([2:2:2*max(max(Kantenr))],:),n*delta_T) .* ...
    tangs([2:2:2*max(max(Kantenr))],:))')' ...
    + Vorzeichen * phi(:,n);
Psi(:,n) = Psi(:,n-2) + (delta_T/2) * (g(:,n) + 2*g(:,n-1) + g(:,n-2));
for l = 1 : min(n-1,m_max+1)
    A_N = A_N + R{1+1}*J(:,n-1);
end
Psi_N(:,n) = sum([A_N([1:6:6*max(max(Kantenr))]),...
    A_N([2:6:6*max(max(Kantenr))]),...
    A_N([3:6:6*max(max(Kantenr))])]' ...
    .* tangs([1:2:2*max(max(Kantenr))],:))')' + ...
    sum([A_N([4:6:6*max(max(Kantenr))]),...
    A_N([5:6:6*max(max(Kantenr))]),...
    A_N([6:6:6*max(max(Kantenr))])]' ...
    .* tangs([2:2:2*max(max(Kantenr))],:))')');
A_N = zeros(6*max(max(Kantenr)),1);
Psi_S = Psi(:,n) - Psi_N(:,n);
J(:,n)(freieKanten) = M(freieKanten,freieKanten) \ Psi_S(freieKanten);
% Glaettung von J
J(:,n) = current_filtering(J(:,n),Elemente,Koordinaten,Kantenr,...
    els2edge,edge_lengths,Vorzeichen,edges2els,areas,ggue,normalen);
J(:,n-1) = (J(:,n) + 2*J(:,n-1) + J(:,n-2))/4;
Psi(:,n-1) = M * J(:,n-1) + Psi_N(:,n-1);
n = n-1;
end
toc
% Ausgabe der y-Komponente nahe des Mittelpunktes der Platte

```

```

n=floor(5/delta_T);
clf;
subplot(2,1,1)
ausgabe(J,Elemente,Koordinaten,Vorzeichen,ggue,edge_lengths,edges2els,...
        N,delta_T,areas,0.5,0.5);
subplot(2,1,2)
ausgabe2(J,rho,Elemente,Koordinaten,n,Vorzeichen,els2edge,areas,ggue,...
        edge_lengths,edges2els);

```

A.3.2 Verschiedene Unterprogramme zur Verwaltung des Netzes

A.3.2.1 Erzeugen von Kantennummern

```

function [Kantennr,Elemente]=GeneriereKantennr(Elemente,Koordinaten)
% Umsortierung, so dass die 1. Kante eines Elements eine laengste Kante ist
for j=1:size(Elemente,1)
    [tmp,a]=max(sum((Koordinaten(Elemente(j,[2,3,1]),:)- ...
                    Koordinaten(Elemente(j,[1,2,3]),:)).^2'));
    Elemente(j,:)=Elemente(j,[a,rem(a,3)+1,rem(a+1,3)+1]);
end
Kantennr=zeros(size(Koordinaten,1),size(Koordinaten,1));
Anz_Kant=0;
for j=1:size(Elemente,1)
    for k=1:3
        a=[Elemente(j,k),Elemente(j,rem(k,3)+1)];
        if Kantennr(a(2),a(1)) % umgekehrt!
            Kantennr(a(1),a(2))=Kantennr(a(2),a(1));
        else
            Anz_Kant=Anz_Kant+1;
            Kantennr(a(1),a(2))=Anz_Kant;
        end
    end
end
end

```

A.3.2.2 Berechnen der Flächeninhalte

```

function areas = Flaecheninhalte(elements,coordinates)
for j = 1 : size(elements,1)
    areas(j) = sqrt(det([-1 1 0;-1 0 1] * coordinates(elements(j,:),:)*...
                        coordinates(elements(j,:),:)' * [-1 -1;1 0;0 1]))/2;
end

```

A.3.2.3 Beziehungen zwischen Kanten und Elementen

Die folgende Funktion erstellt verschiedene Matrizen und Vektoren, die die Assemblierung der Zeitschrittmatrizen vereinfachen.

```

function [tangs,mp_pm,mp_edges,els2edge,edges2els,ggue,edges_length,...
        Vorzeichen,divergences,Kantenenden] = ...
        edges_and_elements(Koordinaten,Elemente,Kantennr,areas)
tangs = zeros(2*max(max(Kantennr)),3);
mp_pm = zeros(2*max(max(Kantennr)),3);
ggue = zeros(max(max(Kantennr)),size(Elemente,1));
mp_edges = zeros(max(max(Kantennr)),3);
els2edge = zeros(2*max(max(Kantennr)),1);
edges2els = zeros(size(Elemente,1),3);
Vorzeichen = zeros(max(max(Kantennr)),size(Elemente,1));

```

```

divergences = sparse(size(Elemente,1),max(max(Kantenrnr)));
for j = 1 : size(Elemente,1)
    for k = 1 : 3
        Anf_Kante = Elemente(j,k);
        Ende_Kante = Elemente(j,rem(k,3)+1);
        if sum(Vorzeichen(Kantenrnr(Anf_Kante,Ende_Kante),:)) == 1
            Vorzeichen(Kantenrnr(Anf_Kante,Ende_Kante),j) = -1;
        else
            Vorzeichen(Kantenrnr(Anf_Kante,Ende_Kante),j) = 1;
        end
    end
end
for j = 1 : size(Elemente,1)
    J = diag(Kantenrnr(Elemente(j,[2,3,1]),Elemente(j,[3,1,2])));
    divergences(j,J) = (sqrt(sum((Koordinaten(Elemente(j,[3,1,2]),:))-...
        Koordinaten(Elemente(j,[2,3,1]),:)).^2'))' .* Vorzeichen(J,j)'/areas(j);
end
for j = 1 : size(Elemente,1)
    for k = 1 : 3
        Anf_Kante = Elemente(j,k);
        Ende_Kante = Elemente(j,rem(k,3)+1);
        Kantenenden(Kantenrnr(Anf_Kante,Ende_Kante),:) = [Anf_Kante,Ende_Kante];
        mp_edges(Kantenrnr(Anf_Kante,Ende_Kante),:) = ...
            (Koordinaten(Anf_Kante,:) + Koordinaten(Ende_Kante,:))/2;
        edges_length(Kantenrnr(Anf_Kante,Ende_Kante)) = ...
            norm(Koordinaten(Anf_Kante,:) - Koordinaten(Ende_Kante,:));
        edges2els(j,k) = Kantenrnr(Anf_Kante,Ende_Kante);
        if Vorzeichen(Kantenrnr(Anf_Kante,Ende_Kante),j) == 1
            tangs(2*Kantenrnr(Anf_Kante,Ende_Kante)-1,:) = ...
                (Koordinaten(Anf_Kante,:) + Koordinaten(Ende_Kante,:))/2 - ...
                sum(Koordinaten(Elemente(j,:),:))/3);
            mp_pm(2*Kantenrnr(Anf_Kante,Ende_Kante)-1,:) = ...
                sum(Koordinaten(Elemente(j,:),:))/3);
            els2edge(2*Kantenrnr(Anf_Kante,Ende_Kante)-1) = j;
            ggue(Kantenrnr(Anf_Kante,Ende_Kante),j) = Elemente(j,rem(k+1,3)+1);
        elseif Vorzeichen(Kantenrnr(Anf_Kante,Ende_Kante),j) == -1
            tangs(2*Kantenrnr(Anf_Kante,Ende_Kante),:) = ...
                (-1)*((Koordinaten(Anf_Kante,:) + Koordinaten(Ende_Kante,:))/2 - ...
                sum(Koordinaten(Elemente(j,:),:))/3));
            mp_pm(2*Kantenrnr(Anf_Kante,Ende_Kante),:) = ...
                sum(Koordinaten(Elemente(j,:),:))/3);
            els2edge(2*Kantenrnr(Anf_Kante,Ende_Kante)) = j;
            ggue(Kantenrnr(Anf_Kante,Ende_Kante),j) = Elemente(j,rem(k+1,3)+1);
        end
    end
end
end

```

A.3.2.4 Kantennormalen

```

function normalen = normals(Elemente,Koordinaten,Kantenrnr,Kantenenden,...
    els2edge,Vorzeichen)
normalen = zeros(max(max(Kantenrnr)),3);
for j = 1 : max(max(Kantenrnr))
    if nnz(els2edge([2*j-1,2*j])) == 2
        vek1 = (Koordinaten(Kantenenden(j,1),:) - ...
            Koordinaten(Kantenenden(j,2),:))/...
            norm(Koordinaten(Kantenenden(j,1),:) - ...
            Koordinaten(Kantenenden(j,2),:));
        vek2 = [0 -1 0;1 0 0;0 0 1] * vek1';
        mp1 = sum(Koordinaten(Elemente(els2edge(2*j-1),:),:))/3;
        mp2 = sum(Koordinaten(Elemente(els2edge(2*j),:),:))/3;
        if Vorzeichen(j,els2edge(2*j-1)) == -1
            vek3 = (mp1 - mp2)/norm(mp2-mp1);
        else
            vek3 = (mp2 - mp1)/norm(mp2-mp1);
        end
        a = vek3 * vek2;
        if a < 0

```

```

        normalen(j,:) = -vek2';
    else
        normalen(j,:) = vek2';
    end
end
end
end

```

A.3.3 Programme zur Erstellung der Zeitschrittmatrizen

A.3.3.1 Matrizen für die retardierte Potentialintegralgleichung

```

function Q = sca_RPIE(Elemente,Koordinaten,areas,delta_T,m_max,h)
Q = {1:m_max+2};
for j = 1 : m_max+2
    Q{j} = sparse(size(Elemente,1),size(Elemente,1));
end
for j = 1 : size(Elemente,1)
    mp1 = sum(Koordinaten(Elemente(j,:),:)/3);
    for k = [1:j-1,j+1:size(Elemente,1)]
        mp2 = sum(Koordinaten(Elemente(k,:),:)/3);
        dist = norm(mp1-mp2);
        m_loc = floor(dist/delta_T);
        eps_loc = dist/delta_T - m_loc;
        Q{m_loc+1}(j,k) = (1-eps_loc) * areas(k) / (4*pi*dist);
        Q{m_loc+2}(j,k) = eps_loc * areas(k) / (4*pi*dist);
    end
    Q{1}(j,j) = sing_int2(Koordinaten(Elemente(j,:),:))/(4*pi);
end

```

In diesem Programm werden die singulären Integrale mit der folgenden Prozedur behandelt.

```

function val = sing_int2(Ecken);
mp = sum(Ecken)/3;
a = norm(mp-Ecken(1,:));
c = norm(mp-Ecken(2,:));
b = norm(Ecken(1,:)-Ecken(2,:));
t1 = a^2;
t2 = b^2;
t4 = t1^2;
t5 = c^2;
t7 = t2^2;
t9 = t5^2;
t16 = a*sqrt(-(-2*t1*t2+t4-2*t1*t5+t7-2*t2*t5+t9)/t1/t2);
t18 = 1/a;
t27 = acos((t1+t2-t5)*t18/b/2);
t28 = -pi-acos((-t1-t5+t2)*t18/c/2)+t27;
t36 = pi-t27;
t44 = -t16*log(1+cos(t28))/2+t16*log(sin(t28))/...
        2+t16*log(sin(t36))/2-t16*log(cos(t36)+1)/2;
val1 = t44;
a = norm(mp-Ecken(2,:));
c = norm(mp-Ecken(3,:));
b = norm(Ecken(2,:)-Ecken(3,:));
t1 = a^2;
t2 = b^2;
t4 = t1^2;
t5 = c^2;
t7 = t2^2;
t9 = t5^2;
t16 = a*sqrt(-(-2*t1*t2+t4-2*t1*t5+t7-2*t2*t5+t9)/t1/t2);
t18 = 1/a;
t27 = acos((t1+t2-t5)*t18/b/2);

```

```

t28 = -pi-acos((-t1-t5+t2)*t18/c/2)+t27;
t36 = pi-t27;
t44 = -t16*log(1+cos(t28))/2+t16*log(sin(t28))/...
      2+t16*log(sin(t36))/2-t16*log(cos(t36)+1)/2;
val2 = t44;
a = norm(mp-Ecken(3,:));
c = norm(mp-Ecken(1,:));
b = norm(Ecken(3,:)-Ecken(1,:));
t1 = a^2;
t2 = b^2;
t4 = t1^2;
t5 = c^2;
t7 = t2^2;
t9 = t5^2;
t16 = a*sqrt(-(-2*t1*t2+t4-2*t1*t5+t7-2*t2*t5+t9)/t1/t2);
t18 = 1/a;
t27 = acos((t1+t2-t5)*t18/b/2);
t28 = -pi-acos((-t1-t5+t2)*t18/c/2)+t27;
t36 = pi-t27;
t44 = -t16*log(1+cos(t28))/2+t16*log(sin(t28))/...
      /2+t16*log(sin(t36))/2-t16*log(cos(t36)+1)/2;
val3 = t44;
val = val1 + val2 + val3;

```

A.3.3.2 Matrizen für die vektorwertige Integralgleichung

```

function M = vec_RPIE_sing(Koordinaten,Elemente,Kantenrnr,edges2els,els2edge,...
                          Kantenenden,mp_edges,ggue,edge_lengths,Vorzeichen,areas)
M = sparse(3*max(max(Kantenrnr)),max(max(Kantenrnr)));
for j = 1 : max(max(Kantenrnr))
    if els2edge(2*j-1) ~= 0
        for l = 1 : 3
            M(3*j-[2,1,0],edges2els(els2edge(2*j-1),l)) = ...
                M(3*j-[2,1,0],edges2els(els2edge(2*j-1),l)) + ...
                edge_lengths(edges2els(els2edge(2*j-1),l))/...
                (8*pi*areas(els2edge(2*j-1))) * ...
                Vorzeichen(edges2els(els2edge(2*j-1),l),els2edge(2*j-1)) * ...
                sing_int(Koordinaten(ggue(j,els2edge(2*j-1)),:),...
                Koordinaten(Kantenenden(j,1,:),Koordinaten(Kantenenden(j,2,:),...
                Koordinaten(ggue(edges2els(els2edge(2*j-1),l),els2edge(2*j-1)),:));
        end
    end
    if els2edge(2*j) ~= 0
        for l = 1 : 3
            M(3*j-[2,1,0],edges2els(els2edge(2*j),l)) = ...
                M(3*j-[2,1,0],edges2els(els2edge(2*j),l)) + ...
                edge_lengths(edges2els(els2edge(2*j),l))/...
                (8*pi*areas(els2edge(2*j))) * ...
                Vorzeichen(edges2els(els2edge(2*j),l),els2edge(2*j)) * ...
                sing_int(Koordinaten(ggue(j,els2edge(2*j)),:),...
                Koordinaten(Kantenenden(j,1,:),Koordinaten(Kantenenden(j,2,:),...
                Koordinaten(ggue(edges2els(els2edge(2*j),l),els2edge(2*j)),:));
        end
    end
end
end

```

Auch hier erfolgt die Behandlung singulärer Integrale durch Aufruf einer Unterfunktion.

```

function val = sing_int(p3,anf_kante,ende_kante,v);
K = 40;
mp = (anf_kante+ende_kante)/2;
if det([1,1,1;anf_kante(1),ende_kante(1),p3(1);...
        anf_kante(2),ende_kante(2),p3(2)]) < 0
    tmp = anf_kante;
    anf_kante = ende_kante;

```

```

    ende_kante= tmp;
end
x1 = anf_kante - mp;
y1 = ende_kante - mp;
z1 = p3 - mp;
w1 = v -mp;
[phi,r] = cart2pol(x1(1),x1(2));
A = [-cos(phi),-sin(phi),0;sin(phi),-cos(phi),0;0,0,1];
x2 = A*x1'; y2 = A*y1'; z2 = A*z1';
a = norm(x2);
% linke Haelfte des Dreiecks behandeln
b = norm(z2);c = norm(x2-z2);
% Integral ueber 1/|z|
temp1 = -((-2*a^2*c^2+a^4-2*a^2*b^2+c^4-2*c^2*b^2+b^4)/(a^2*c^2);
temp2 = acos((a^2+c^2-b^2)/(2*a*c)) + acos((a^2+b^2-c^2)/(2*a*b));
d3(1) = (log((1/sin(temp2)-1/tan(temp2)))*a*sqrt(temp1) - ...
    log((2*a*c-a^2-c^2+b^2)/(a*c*sqrt(temp1)))*a*sqrt(temp1))/2;
% Integral ueber z/|z|
t1 = a^2; t2 = c^2; t4 = t1^2; t5 = b^2; t7 = t2^2; t9 = t5^2; t16 = 1/a;
theta_0 = acos((a^2+b^2-c^2)/(2*a*b));
% theta(1) = acos((a^2+b^2-c^2)/(2*a*b))/4;
% theta(2) = 3*acos((a^2+b^2-c^2)/(2*a*b))/4;
int_x = zeros(2,1);int_y = zeros(2,1);
for i = 1 : K
    theta(i) = theta_0*((i-1)/K + 1/(2*K));
    t23 = sin(acos((t1+t2-t5)*t16/c/2)+theta(i))^2;
    t34 = (-(-2*t1*t2+t4-2*t1*t5+t7-2*t2*t5+t9)/t2*cos(-pi+theta(i)))/t23/8;
    int_x(1) = int_x(1) + t34 * theta_0/K;
    t34 = (1/t23*sin(-pi+theta(i)))/t2*(-2*t1*t2+t4-2*t1*t5+t7-2*t2*t5+t9)/8;
    int_y(1) = int_y(1) + t34 * theta_0/K;
end
% rechte Haelfte des Dreiecks behandeln
b = norm(z2);c = norm(y2-z2);
temp1 = -((-2*a^2*c^2+a^4-2*a^2*b^2+c^4-2*c^2*b^2+b^4)/(a^2*c^2);
temp2 = acos((a^2+c^2-b^2)/(2*a*c)) + acos((a^2+b^2-c^2)/(2*a*b));
d3(2) = (log((1/sin(temp2)-1/tan(temp2)))*a*sqrt(temp1) - ...
    log((2*a*c-a^2-c^2+b^2)/(a*c*sqrt(temp1)))*a*sqrt(temp1))/2;
theta_0 = acos((a^2+b^2-c^2)/(2*a*b));
% theta(1) = acos((a^2+b^2-c^2)/(2*a*b))/4;
% theta(2) = 3*acos((a^2+b^2-c^2)/(2*a*b))/4;
for i = 1 : K
    theta(i) = theta_0*((i-1)/K + 1/(2*K));
    t1 = a^2; t2 = c^2; t4 = t1^2; t5 = b^2; t7 = t2^2; t9 = t5^2; t15 = 1/a;
    t22 = sin(acos(1/c*t15*(t1+t2-t5)/2)+theta(i))^2;
    t33 = (-1/t22*cos(theta(i)))/t2*(-2*t2*t1+t4-2*t5*t1+t7-2*t5*t2+t9)/8;
    int_x(2) = int_x(2) + t33 * theta_0/K;
    t33 = (-1/t22*sin(theta(i)))/t2*(-2*t2*t1+t4-2*t5*t1+t7-2*t5*t2+t9)/8;
    int_y(2) = int_y(2) + t33 * theta_0/K;
end
val = inv(A) * [int_x(1)+int_x(2);int_y(1)+int_y(2);0] - w1' * (d3(1)+d3(2));

```

A.3.3.3 Aufstellen der restlichen Matrizen

```

#include <stdio.h>
#include <matrix.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include "ctype.h"
#include "string.h"
#include "mex.h"
#include "sparse.h"
void initieren(
    double Coordinates[], double Elements[],
    unsigned long int mC, unsigned long int mE,
    double gausspoints[]
)
{
    int i,k;
    int e[3];

```



```

double x[3], y[3], z[3];
for (k=0; k<mE; k++){
    for (i=0; i<3; i++){
        e[i] = Elements[k+i*mE];
        x[i] = Coordinates[e[i]-1];
        y[i] = Coordinates[e[i]-1+mC] ;
        z[i] = Coordinates[e[i]-1+2*mC];
    }
    gausspoints[(3*k)+0] = ( (4*x[0]) + x[1] + x[2] ) / 6;
    gausspoints[(3*k)+0+(3*mE)] = ( (4*y[0]) + y[1] + y[2] ) / 6;
    gausspoints[(3*k)+0+(6*mE)] = ( (4*z[0]) + z[1] + z[2] ) / 6;
    gausspoints[(3*k)+1] = ( x[0] + (4*x[1]) + x[2] ) / 6;
    gausspoints[(3*k)+1+(3*mE)] = ( y[0] + (4*y[1]) + y[2] ) / 6;
    gausspoints[(3*k)+1+(6*mE)] = ( z[0] + (4*z[1]) + z[2] ) / 6;
    gausspoints[(3*k)+2] = ( x[0] + x[1] + (4*x[2]) ) / 6;
    gausspoints[(3*k)+2+(3*mE)] = ( y[0] + y[1] + (4*y[2]) ) / 6;
    gausspoints[(3*k)+2+(6*mE)] = ( z[0] + z[1] + (4*z[2]) ) / 6;
}
}

void CellArray(
    double Coordinates[], double Elements[],
    unsigned long int mC, unsigned long int mE,
    unsigned long int mK,
    struct DMATRIX** R, double h, double delta_T,
    double MAX[], double gausspoints[],
    double Kantennr[],
    double edge_lengths[], double Vorzeichen[],
    double ggue[], double mp_edges[],
    double mp_pm[], double edges2els[], double els2edge[]
)
{
    int m_loc;
    long int j,k,p,i,l,index, ggues;
    double dist, eps_loc, mpx_1, mpy_1, mpz_1, rho, sep;
    int e[3], Gauss[9], I[3], J[3];
    double x_k[3], y_k[3], z_k[3], x_l[3], y_l[3], z_l[3], wert;
    rho = 3 * h;
    for (j=0; j<mK; j++){
        for (k=0; k<mE; k++){
            if (!(k==els2edge[2*j]) & !(k==els2edge[2*j+1])){
                for (p=0; p<3; p++){
                    e[p] = Elements[k+p*mE];
                    x_k[p] = Coordinates[e[p]-1];
                    y_k[p] = Coordinates[e[p]-1+mC] ;
                    z_k[p] = Coordinates[e[p]-1+2*mC] ;
                }
                mpx_1 = (x_k[0] + x_k[1] + x_k[2])/3;
                mpy_1 = (y_k[0] + y_k[1] + y_k[2])/3;
                mpz_1 = (z_k[0] + z_k[1] + z_k[2])/3;
                sep = sqrt( (mp_edges[j] - mpx_1) * (mp_edges[j] - mpx_1) +
                    (mp_edges[j+mK] - mpx_1) * (mp_edges[j+mK] - mpx_1) +
                    (mp_edges[j+2*mK] - mpx_1) * (mp_edges[j+2*mK] - mpx_1));
                /* if (sep < rho){ */
                for (i=0; i<3; i++){
                    dist = sqrt( (mp_pm[2*j] - gausspoints[3*k+i]) *
                        (mp_pm[2*j] - gausspoints[3*k+i]) +
                        (mp_pm[2*j+2*mK] - gausspoints[3*k+i+3*mE]) *
                        (mp_pm[2*j+2*mK] - gausspoints[3*k+i+3*mE]) +
                        (mp_pm[2*j+4*mK] - gausspoints[3*k+i+6*mE]) *
                        (mp_pm[2*j+4*mK] - gausspoints[3*k+i+6*mE]) );
                    m_loc = (int) ( dist / delta_T);
                    eps_loc = dist / delta_T - m_loc;
                    for (l=0; l<3; l++){
                        index = edges2els[k+l*mE];
                        ggues = ggue[index-1+k*mK];
                        dadd(R[m_loc], 6*(j+1)-5, 6*index, (1-eps_loc) *

```

```

Vorzeichen[index-1+k*mK] * edge_lengths[index-1] *
(gausspoints[3*k+i] - Coordinates[ggues-1]) /
(3*8* dist));
dadd(R[m_loc],6*(j+1)-4,6*index,(1-eps_loc) *
Vorzeichen[index-1+k*mK] * edge_lengths[index-1] *
(gausspoints[3*k+i+3*mE] - Coordinates[ggues-1+mC]) /
(3*8* dist));
dadd(R[m_loc],6*(j+1)-3,6*index,(1-eps_loc) *
Vorzeichen[index-1+k*mK] * edge_lengths[index-1] *
(gausspoints[3*k+i+6*mE] - Coordinates[ggues-1+2*mC]) /
(3*8* dist));
dadd(R[m_loc+1],6*(j+1)-5,6*index,eps_loc *
Vorzeichen[index-1+k*mK] * edge_lengths[index-1] *
(gausspoints[3*k+i] - Coordinates[ggues-1]) /
(3*8* dist));
dadd(R[m_loc+1],6*(j+1)-4,6*index,eps_loc *
Vorzeichen[index-1+k*mK] * edge_lengths[index-1] *
(gausspoints[3*k+i+3*mE] - Coordinates[ggues-1+mC]) /
(3*8* dist));
dadd(R[m_loc+1],6*(j+1)-3,6*index,eps_loc *
Vorzeichen[index-1+k*mK] * edge_lengths[index-1] *
(gausspoints[3*k+i+6*mE] - Coordinates[ggues-1+2*mC]) /
(3*8* dist));
}
dist = sqrt( (mp_pm[2*j+1] - gausspoints[3*k+i]) *
(mp_pm[2*j+1] - gausspoints[3*k+i]) +
(mp_pm[2*j+1+2*mK] - gausspoints[3*k+i+3*mE]) *
(mp_pm[2*j+1+2*mK] - gausspoints[3*k+i+3*mE]) +
(mp_pm[2*j+1+4*mK] - gausspoints[3*k+i+6*mE]) *
(mp_pm[2*j+1+4*mK] - gausspoints[3*k+i+6*mE]) );
m_loc = (int) ( dist / delta_T);
eps_loc = dist / delta_T - m_loc;
for (l=0; l<3; l++){
index = edges2els[k+l*mE];
ggues = ggue[index-1+k*mK];
dadd(R[m_loc],6*(j+1)-2,6*index,(1-eps_loc) *
Vorzeichen[index-1+k*mK] * edge_lengths[index-1] *
(gausspoints[3*k+i] - Coordinates[ggues-1]) /
(3*8* dist));
dadd(R[m_loc],6*(j+1)-1,6*index,(1-eps_loc) *
Vorzeichen[index-1+k*mK] * edge_lengths[index-1] *
(gausspoints[3*k+i+3*mE] - Coordinates[ggues-1+mC]) /
(3*8* dist));
dadd(R[m_loc],6*(j+1),6*index,(1-eps_loc) *
Vorzeichen[index-1+k*mK] * edge_lengths[index-1] *
(gausspoints[3*k+i+6*mE] - Coordinates[ggues-1+2*mC]) /
(3*8* dist));
dadd(R[m_loc+1],6*(j+1)-2,6*index,eps_loc *
Vorzeichen[index-1+k*mK] * edge_lengths[index-1] *
(gausspoints[3*k+i] - Coordinates[ggues-1]) /
(3*8* dist));
dadd(R[m_loc+1],6*(j+1)-1,6*index,eps_loc *
Vorzeichen[index-1+k*mK] * edge_lengths[index-1] *
(gausspoints[3*k+i+3*mE] - Coordinates[ggues-1+mC]) /
(3*8* dist));
dadd(R[m_loc+1],6*(j+1),6*index,eps_loc *
Vorzeichen[index-1+k*mK] * edge_lengths[index-1] *
(gausspoints[3*k+i+6*mE] - Coordinates[ggues-1+2*mC]) /
(3*8* dist));
}
}
}
}
return;
}

```

```

/* ----- */
/* ---- gateway function to matlab ----- */
/* ----- */
void mexFunction(
    int nlhs,          mxArray *plhs[],
    int nrhs, const mxArray *prhs[]
)
{
    mxArray          **array_ptr;
    struct DMATRIX    **z;
    double            *Trans_inner;
    double            *x, *y, *s, *t, *u, *Vorzeichen,
                      *edge_lengths, *Kantennr, *ggue, *mp_edges,
                      *mp_pm, *edges2els, *els2edge;
    unsigned int long  m1,n1,m2,n2,mK;
    int                k, l, NoMatrix;
    int N;
    double h, *jacob, *gausspoints, kappa,*MAX;
    /* Check for proper number of arguments */
    if (nrhs != 13) {
        mexErrMsgTxt("Only five input arguments allowed.");
    } else if (nlhs != 3) {
        mexErrMsgTxt("Only one output argument allowed.");
    }

    /* The first input must be a matrix. */
    m1 = mxGetM(prhs[0]);
    n1 = mxGetN(prhs[0]);
    if (!mxIsDouble(prhs[0]) || mxIsComplex(prhs[0]) ||
        !( n1 == 3)) {
        mexErrMsgTxt("Input must be a n x 3 matrix.");
    }

    /* The second input must be a matrix. */
    m2 = mxGetM(prhs[1]);
    n2 = mxGetN(prhs[1]);
    if (!mxIsDouble(prhs[1]) || mxIsComplex(prhs[1]) ||
        !( n2 == 3)) {
        mexErrMsgTxt("Input must be a n x 3 matrix bla.");
    }

    mK = mxGetN(prhs[6]);
    /* The third input must be a scalar. */
    if (!mxIsDouble(prhs[2]) || mxIsComplex(prhs[2]) ||
        !( mxGetM(prhs[2]) * mxGetN(prhs[2]) == 1 ) ) {
        mexErrMsgTxt("Input must be a scalar.");
    }

    /* The 4th input must be a scalar. */
    if (!mxIsDouble(prhs[3]) || mxIsComplex(prhs[3]) ||
        !( mxGetM(prhs[3]) * mxGetN(prhs[3]) == 1 ) ) {
        mexErrMsgTxt("Input must be a scalar.");
    }

    /* The 5th input must be an integer. */
    if (!mxIsDouble(prhs[4]) || mxIsComplex(prhs[4]) ||
        !( mxGetM(prhs[4]) * mxGetN(prhs[4]) == 1 ) ) {
        mexErrMsgTxt("Input must be a scalar.");
    }

    /* Assign pointers to the various parameters */
    x = mxGetPr(prhs[0]);
    y = mxGetPr(prhs[1]);
    s = mxGetPr(prhs[2]);
    t = mxGetPr(prhs[3]);
    u = mxGetPr(prhs[4]);
    Kantennr = mxGetPr(prhs[5]);
    edge_lengths = mxGetPr(prhs[6]);
    Vorzeichen = mxGetPr(prhs[7]);
    ggue = mxGetPr(prhs[8]);
    mp_edges = mxGetPr(prhs[9]);
    mp_pm = mxGetPr(prhs[10]);

```

```

edges2els = mxGetPr(prhs[11]);
els2edge = mxGetPr(prhs[12]);
/*
*/
plhs[1] = mxCreateDoubleMatrix(3*m2,3,mxREAL);
gausspoints = mxGetPr(plhs[1]);
plhs[2] = mxCreateDoubleMatrix(1,1,mxREAL);
MAX = mxGetPr(plhs[2]);
initieren(x, y, m1, m2, gausspoints);
MAX[0] = (int)(*u);
NoMatrix = ((int) MAX[0])+5;
MAX[0] = 0;
/* Create the output CellMatrix and load it into plhs[0]. */
plhs[0] = mxCreateCellMatrix(1,NoMatrix);
z = (struct DMATRIX **) mxCalloc(NoMatrix,sizeof(struct DMATRIX*));
for (k=0; k<NoMatrix; k++){
    z[k] = mxCalloc(1,sizeof(struct DMATRIX));
    dsparse(z[k],6*mK);
}
/* Do the actual computations in a subroutine */
CellArray(x, y, m1, m2, mK, z, *s, *t, MAX, gausspoints, Kantennr,
    edge_lengths, Vorzeichen, ggue, mp_edges, mp_pm,
    edges2els, els2edge);
array_ptr = (mxArray **) mxCalloc(1,sizeof(mxArray*));
for (k=0; k<NoMatrix; k++){
    dsparse2matlab(z[k],array_ptr);
    mxSetCell(plhs[0],k,*array_ptr);
}
mxFree(array_ptr);
mxFree(z);
}

```

A.3.4 Verschiedene Modifikationsprozeduren

Die folgenden Prozeduren realisieren die Stabilisierungsmodifikationen.

A.3.4.1 Filtern der Ladung

```

function filtered_charge = charge_filtering(Elemente,divj,edges2els,els2edge,epsilon)
for j = 1 : size(Elemente,1)
    liste = edges2els(j,:);
    for i = 1 : 3
        if els2edge(2*liste(i)-1) == j & els2edge(2*liste(i)) ~= 0
            el(i) = els2edge(2*liste(i));
        elseif els2edge(2*liste(i)-1) ~= j & els2edge(2*liste(i)) == j
            el(i) = els2edge(2*liste(i)-1);
        else
            el(i) = j;
        end
    end
    filtered_charge(j) = divj(j)/2 + (divj(el(1)) + divj(el(2)) + divj(el(3)))/6;
end
filtered_charge = epsilon * filtered_charge + (1 - epsilon) * divj';

```

A.3.4.2 Filtern des Stroms

```

function Jf = current_filtering(J,Elemente,Koordinaten,Kantennr,...
    els2edge,edge_lengths,Vorzeichen,edges2els,areas,ggue,normalen)

```

```

Jf = zeros(size(J));
for j = 1 : max(max(Kantenr))
    if nnz(els2edge([2*j-1,2*j])) == 2
        mp1 = sum(Koordinaten(Elemente(els2edge(2*j-1),:),:)/3);
        liste1 = edges2els(els2edge(2*j-1),:);
        mp2 = sum(Koordinaten(Elemente(els2edge(2*j),:),:)/3);
        liste2 = edges2els(els2edge(2*j),:);
        val1 = J(liste1(1)) * Vorzeichen(liste1(1),els2edge(2*j-1)) * ...
            edge_lengths(liste1(1)) / (2*areas(els2edge(2*j-1))) * ...
            (mp1-Koordinaten(ggue(liste1(1),els2edge(2*j-1)),:)) + ...
            J(liste1(2)) * Vorzeichen(liste1(2),els2edge(2*j-1)) * ...
            edge_lengths(liste1(2)) / (2*areas(els2edge(2*j-1))) * ...
            (mp1-Koordinaten(ggue(liste1(2),els2edge(2*j-1)),:)) + ...
            J(liste1(3)) * Vorzeichen(liste1(3),els2edge(2*j-1)) * ...
            edge_lengths(liste1(3)) / (2*areas(els2edge(2*j-1))) * ...
            (mp1-Koordinaten(ggue(liste1(3),els2edge(2*j-1)),:));
        val2 = J(liste2(1)) * Vorzeichen(liste2(1),els2edge(2*j)) * ...
            edge_lengths(liste2(1)) / (2*areas(els2edge(2*j))) * ...
            (mp2-Koordinaten(ggue(liste2(1),els2edge(2*j)),:)) + ...
            J(liste2(2)) * Vorzeichen(liste2(2),els2edge(2*j)) * ...
            edge_lengths(liste2(2)) / (2*areas(els2edge(2*j))) * ...
            (mp2-Koordinaten(ggue(liste2(2),els2edge(2*j)),:)) + ...
            J(liste2(3)) * Vorzeichen(liste2(3),els2edge(2*j)) * ...
            edge_lengths(liste2(3)) / (2*areas(els2edge(2*j))) * ...
            (mp2-Koordinaten(ggue(liste2(3),els2edge(2*j)),:));
        normale_auf_Kante = (mp2-mp1)/norm(mp1-mp2);
        Jf(j) = (val1 + val2) * normalen(j,:)' / 2;
    end
end

```

A.3.5 Die rechte Seite

In der Funktion E.m ist der Gaußsche Puls als Funktion definiert.

```

function y = E(x,t);
    val = zeros(size(x,1),3);
    val(:,1) = zeros(size(x,1),1);
    val(:,2) = exp(-(t-3.4)^2) * ones(size(x,1),1);
    val(:,3) = zeros(size(x,1),1);
    y = val;

```

A.3.6 Routinen zur grafischen Darstellung der Lösung

A.3.6.1 Ausgabe des Stroms nahe des Mittelpunktes

Die folgende Funktion gibt die y -Komponente des Stroms nahe des Mittelpunktes des Einheitsquadrats als Funktion der Zeit aus.

```

function ausgabe(J,Elemente,Koordinaten,Vorzeichen,ggue,edge_lengths,...
    edges2els,N,delta_T,areas,x,y)
% Ausgabe der y-Komponente nahe des Mittelpunktes der Platte
for j = 1 : size(Elemente,1)

```

```

    mps(j) = norm(sum(Koordinaten(Elemente(j,:),:)/3)-[x,y,0]);
end
ind1 = find(mps == min(mps));
ind = ind1(1);
mp = sum(Koordinaten(Elemente(ind,:),:)/3);
liste = edges2els(ind,:);
koeff(1) = Vorzeichen(liste(1),ind) * ...
    (mp(2)-Koordinaten(ggue(liste(1),ind),2))*edge_lengths(liste(1));
koeff(2) = Vorzeichen(liste(2),ind) * ...
    (mp(2)-Koordinaten(ggue(liste(2),ind),2))*edge_lengths(liste(2));
koeff(3) = Vorzeichen(liste(3),ind) * ...
    (mp(2)-Koordinaten(ggue(liste(3),ind),2))*edge_lengths(liste(3));
for n = 1 : N
    lsg_nahe_mp(n) = koeff * J(liste,n) / (2*areas(ind));
end
plot([1:N]*delta_T,lsg_nahe_mp([1:N]))

```

A.3.6.2 Ausgabe des Vektorfeldes

Die folgende Routine ermöglicht die grafische Darstellung des Stroms als Vektorfeld zu einem bestimmten Zeitpunkte $n\Delta t$.

```

function ausgabe2(J,rho,Elemente,Koordinaten,n,Vorzeichen,els2edge,areas,...
    ggue,edge_lengths,edges2els)
% Oberflaeche plotten
X = reshape(Koordinaten(Elemente',1),size(Elemente,2),size(Elemente,1));
Y = reshape(Koordinaten(Elemente',2),size(Elemente,2),size(Elemente,1));
Z = reshape(Koordinaten(Elemente',3),size(Elemente,2),size(Elemente,1));
fill3(X,Y,Z,rho(:,n)');
hold on
for j = 1 : size(Elemente,1)
    liste = edges2els(j,:);
    mp = sum(Koordinaten(Elemente(j,:),:)/3);
    val = J(liste(1),n) * Vorzeichen(liste(1),j) * edge_lengths(liste(1)) / ...
        (2*areas(j)) * (mp-Koordinaten(ggue(liste(1),j),:)) + ...
        J(liste(2),n) * Vorzeichen(liste(2),j) * edge_lengths(liste(2)) / ...
        (2*areas(j)) * (mp-Koordinaten(ggue(liste(2),j),:)) + ...
        J(liste(3),n) * Vorzeichen(liste(3),j) * edge_lengths(liste(3)) / ...
        (2*areas(j)) * (mp-Koordinaten(ggue(liste(3),j),:));
    quiver3(mp(1),mp(2),mp(3),val(1),val(2),val(3),1/10 );
end
view(90,90)
colorbar

```

Anhang B

Die Verwendung der Bibliothek `sparse.h` erlaubt die Verwendung von spärlich besetzten Matrizen unter C. Dieses Matrizenformat verringert den Speicherbedarf des obigen Programms um ein Vielfaches. Die Deklaration einer 'sparse'-Matrix erfolgt mit `STRUCT DMatrix` und die Initialisierung mit `dsparse`. Die Funktion `dadd` erlaubt die Manipulation der Matrixeinträge (vergl. obige Programmcodes).

```
/* sparse.h, Bibliothek zur Definition und Bearbeitung von spärlich besetzten
Matrizen unter C */
#define MAX(i,j) (((i)<=(j))?(j):(i))
#define MIN(i,j) (((i)<=(j))?(i):(j))
struct IJPTR {
    unsigned int iptr;
    int value;
    struct IJPTR *next;
};
struct IMATRIX {
    struct IJPTR **jptr;
    unsigned int dimension;
};
struct DJPTR {
    unsigned int iptr;
    double value;
    struct DJPTR *next;
};
struct DMATRIX {
    struct DJPTR **jptr;
    unsigned int dimension;
};
void dsparse(struct DMATRIX *A, unsigned int dimension){
    struct DJPTR **jptr;
    if( (unsigned long int) dimension < 1
        || (unsigned long int) dimension > 65535 ) {
        fprintf(stderr,"Dimension zu gross gewaehlt!\n");
        exit(1);
    } else {
        A->dimension = dimension;
    }
    jptr = mxCalloc(dimension,sizeof(*jptr));
    if (jptr!= NULL){
        memset(jptr,NULL,dimension);
        A->jptr = jptr;
    } else {
        fprintf(stderr,"<dsparse> Nicht genug Speicher vorhanden!\n");
        exit(1);
    }
}
/* ----- */
void dadd(struct DMATRIX *A, unsigned int i, unsigned int j, double x){
    struct DJPTR *iptr;
    struct DJPTR *ptr;
    struct DJPTR *optr;
    if (MAX(i,j) > A->dimension || MIN(i,j) < 1){
        fprintf(stderr,"<dadd> Index nicht zulaessig!\n");
        exit(1);
    } else {
        if (A->jptr[j-1] == NULL){
```

```

    iptr = mxCalloc(1,sizeof(*iptr));
    if (iptr != NULL){
        iptr->value = x;
        iptr->next = NULL;
        iptr->iptr = i;
    } else {
        fprintf(stderr,"<dadd> Nicht genug Speicher vorhanden!\n");
        exit(1);
    }
    A->jptr[j-1] = iptr;
} else {
    ptr = A->jptr[j-1];
    if (ptr->iptr > i) {
        iptr = mxCalloc(1,sizeof(*iptr));
        if (iptr != NULL){
            iptr->value = x;
            iptr->next = A->jptr[j-1];
            iptr->iptr = i;
        } else {
            fprintf(stderr,"<dadd> Nicht genug Speicher vorhanden!\n");
            exit(1);
        }
        A->jptr[j-1] = iptr;
        return;
    }
    optr = NULL;
    while (ptr->next != NULL){
        if (ptr->iptr < i && ptr->next->iptr > i) {
            iptr = mxCalloc(1,sizeof(*iptr));
            if (iptr != NULL){
                iptr->value = x;
                iptr->iptr = i;
                iptr->next = ptr->next;
                ptr->next = iptr;
                return;
            } else {
                fprintf(stderr,"<dadd> Nicht genug Speicher vorhanden!\n");
                exit(1);
            }
        } else if (ptr->iptr == i) {
            ptr->value+=x;
            return;
        }
        optr = ptr;
        ptr = ptr->next;
    }
    if (ptr->iptr == i) {
        ptr->value+=x;
        return;
    }
    iptr = mxCalloc(1,sizeof(*iptr));
    if (iptr != NULL){
        iptr->value = x;
        iptr->next = NULL;
        iptr->iptr = i;
    } else {
        fprintf(stderr,"<dadd> Nicht genug Speicher vorhanden!\n");
        exit(1);
    }
    ptr->next = iptr;
}
}
}
/* ----- */
void dadd_2(struct DMATRIX *A, unsigned int i, unsigned int j, double x){
    struct DJPTR *iptr;
    struct DJPTR *ptr;
    if (MAX(i,j) > A->dimension || MIN(i,j) < 1){

```



```

    fprintf(stderr,"<dadd> Index nicht zulaessig!\n");
    exit(1);
} else {
    if (A->jptr[j-1] == NULL){
        iptr = mxCalloc(1,sizeof(*iptr));
        if (iptr != NULL){
            iptr->value = x;
            iptr->next = NULL;
            iptr->iptr = i;
        } else {
            fprintf(stderr,"<dadd> Nicht genug Speicher vorhanden!\n");
            exit(1);
        }
        A->jptr[j-1] = iptr;
    } else {
        ptr = A->jptr[j-1];
        while (ptr->next != NULL){
            if (ptr->iptr == i) {
                ptr->value+=x;
                return;
            }
            ptr = ptr->next;
        }
        iptr = mxCalloc(1,sizeof(*iptr));
        if (iptr != NULL){
            iptr->value = x;
            iptr->next = NULL;
            iptr->iptr = i;
        } else {
            fprintf(stderr,"<dadd> Nicht genug Speicher vorhanden!\n");
            exit(1);
        }
        ptr->next = iptr;
    }
}
}
}
/* ----- */
void dadd_1(struct DMATRIX *A, unsigned int i, unsigned int j, double x){
    struct DJPTR *iptr;
    struct DJPTR *ptr;
    if (MAX(i,j) > A->dimension || MIN(i,j) < 1){
        fprintf(stderr,"<dadd> Index nicht zulaessig!\n");
        exit(1);
    } else {
        iptr = mxCalloc(1,sizeof(*iptr));
        if (iptr != NULL){
            iptr->value = x;
            iptr->next = NULL;
            iptr->iptr = i;
        } else {
            fprintf(stderr,"<dadd> Nicht genug Speicher vorhanden!\n");
            exit(1);
        }
        if (A->jptr[j-1] == NULL){
            A->jptr[j-1] = iptr;
        } else {
            ptr = A->jptr[j-1];
            while (ptr->next != NULL) ptr = ptr->next;
            ptr->next = iptr;
        }
    }
}
}
/* ----- */
int dlist(struct DMATRIX *A, unsigned int j)
{
    struct DJPTR *ptr;
    int cnt;
    ptr = A->jptr[j-1];

```

```

    cnt = 0;
    while (ptr!= NULL){
        printf("(%i,%i) = %f\n",ptr->iptr,j,ptr->value);
        ptr = ptr->next;
        cnt++;
    }
    return cnt;
}
/* ----- */
int dcmp(const void *va, const void *vb)
{
    struct DJPTR **a;
    struct DJPTR **b;
    int tmp;
    a = (struct DJPTR **) va;
    b = (struct DJPTR **) vb;
    if ( ((*a)).iptr > ((*b)).iptr){
        return 1;
    } else if ( ((*a)).iptr < ((*b)).iptr) {
        return -1;
    } else {
        return 0;
    }
}
/* ----- */
void dsort(struct DMATRIX *A, unsigned int j)
{
    struct DJPTR *ptr;
    unsigned int nnz;
    unsigned int cnt;
    struct DJPTR **pstore;
    /* printf("-- dsort --- in\n"); */
    /* printf(" - step 0 -\n"); */
    /* zaehle Eintraege fuer j-te Spalte */
    if (A->jptr[j-1]== NULL) return;
    ptr = A->jptr[j-1];
    nnz = 0;
    while (ptr!= NULL){
        nnz++;
        ptr = ptr->next;
    }
    /* printf(" - step 1 -\n"); */
    pstore = mxCalloc(nnz,sizeof(*pstore));
    if (pstore == NULL){
        fprintf(stderr,"<dsort> Nicht genug Speicher vorhanden!\n");
        exit(1);
    }
    /* printf(" - step 2 -\n"); */
    ptr = A->jptr[j-1];
    cnt=0;
    while (ptr!= NULL){
        pstore[cnt] = ptr;
        ptr = ptr->next;
        cnt++;
    }
    /* printf(" - step 3 -\n"); */
    qsort(pstore,nnz,sizeof(*pstore),dcmp);
    /* printf(" - step 4 - nnz = %i\n",nnz); */
    A->jptr[j-1] = pstore[0];
    ptr = pstore[0];
    for (cnt=1;cnt<nnz;cnt++){
        if ( ptr->iptr == pstore[cnt]->iptr){
            ptr->value += pstore[cnt]->value;
            mxFree(pstore[cnt]);
        } else {
            ptr->next = pstore[cnt];
            ptr=ptr->next;
        }
    }
}

```

```

    }
    ptr->next = NULL;
    /* printf(" - step 5 -\n"); */
    mxFree(pstore);

    /* printf("-- dsort --- out\n"); */
    cnt=0;
    ptr = A->jptr[j-1];
    while (ptr!= NULL){
        pstore[cnt] = ptr;
        ptr = ptr->next;
        cnt++;
    }
    /* printf(" - step 6 - nnz = %i\n",cnt); */
}

/* ----- */
dsparse2matlab(struct DMATRIX *A, mxArray **array_ptr)
{
    unsigned int i, j, cnt , nnz;
    int i1, i2;
    double *start_of_pr;
    int *start_of_ir, *start_of_jc;
    struct DJPTR *ptr, *optr;
    /* printf(" - step 1 -\n"); */
    nnz = 0;
    for (j=0; j < A->dimension;j++){
        /*
        i1=dlist(A,j+1);
        printf(" %i\n",i1);
        */
        dsort(A,j+1);
        /*
        i2=dlist(A,j+1);
        printf(" %i\n",i2);
        */
        /* if ( MAX(i1-i2,i2-i1) > 0 ) exit(1); */
        ptr = A->jptr[j];
        while (ptr!= NULL){
            nnz++;
            ptr = ptr->next;
        }
    }
    /* printf(" - step 2 -\n"); */
    *array_ptr = mxCreateSparse(A->dimension,A->dimension,nnz,mxREAL);
    mxSetName(*array_ptr,"Sparrow");
    start_of_pr = (double *) mxGetPr(*array_ptr);
    start_of_ir = (int *) mxGetIr(*array_ptr);
    start_of_jc = (int *) mxGetJc(*array_ptr);
    /* printf(" - step 3 -\n"); */
    for (j=0,cnt=0; j < A->dimension; j++){
        start_of_jc[j] = cnt;
        ptr = A->jptr[j];
        while (ptr!= NULL){
            start_of_pr[cnt] = ptr->value;
            start_of_ir[cnt] = ptr->iptr-1;
            optr = ptr;
            ptr = ptr->next;
            /* mxFree(optr); */
            cnt++;
        }
    }
    start_of_jc[A->dimension]=cnt;
    /* printf(" - step 4 -\n"); */
    mxFree(A->jptr);
}

```



Literaturverzeichnis

- [A] Adams, R.A., '*Sobolev Spaces*', Pure Appl. Math. 65, Academic Press, New York, 1975.
- [AlFi] Alonso, M. and Finn, E.J., '*Fundamental University Physics - Volume II, Fields and Waves*', Addison-Wesley Publishing Company, 1967.
- [BaDuo] Bamberger, A., Duong, T. Ha, 'Formulation Variationnelle Espace-Temps par le Calcul par Potentiel Retardé de la Diffraction d'une Onde Acoustique (I)', Math. Meth. in the Appl. Sci. 8, 1986.
- [B] Bartels, S., 'Numerical Analysis of Retarded Potential Integral Equations of Electromagnetism', unveröffentliche Master-Thesis, Edinburgh, 1998.
- [C] Carstensen, C., '*Wissenschaftliches Rechnen I*', Skript zur Vorlesung, Kiel, 1997.
- [CoKre] Colton, D., Kress, R., '*Integral Equation Methods in Scattering Theory*', Pure and Applied Mathematics, 1983.
- [Cos] Costabel, M., 'Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results', SIAM J. Math. anal. 19 (1988), 613-626.
- [Da1] Davies, P.J., 'A stability analysis of a time marching scheme for the general surface electric integral equation', Applied Numerical Mathematics 27 (1998) 33-57.
- [Da2] Davies, P.J., 'Stability of time-marching numerical schemes for the electric field integral equation', Journal of Electromagnetic Waves and Applications, Vol.8, No.1, 85-114,1994.
- [Da3] Davies, P.J., 'Numerical stability and convergence of approximations of retarded potential integral equations', SIAM J. Numer. Anal., Vol. 31, No 3, 856-875, June 1994.
- [Da4] Davies, P.J., 'On the Stability of Time-Marching Schemes for the General Surface Electric-Field Integral Equation', IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 44, No 11, November 1996.
- [DaDu] Davies, P.J., Duncan, D.B., 'Averaging techniques for time-marching schemes for retarded potential integral equations', Applied Numerical Mathematics 23 (1997) 291-310.
- [Duf] Duffy, M.G., 'Quadrature over a Pyramid or cube of Integrands with a Singularity at a Vertex', SIAM J. Numer. Anal., Vol. 19, No 6, 1260-1262, December 1982.
- [GiRa] Girault, V., Raviart, P.-A., '*Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*', Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, 1986.
- [Jo] Jones, D.S., '*Theory of Electromagnetism*', Oxford University Press, 1964.

- [Kre] Kress, R., '*Linear Integral Equations*', Appl. Math. Sci. 82, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, 1989.
- [LiDa] Lions, R., Dautray, J.-L., '*Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*', Vol. 1-6, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, 1990.
- [PeSi] Peirce, A., Siebrits, E., 'Stability Analysis and Design of Time-Stepping Schemes for General Elastodynamic Boundary Element Models', International Journal for Numerical Methods in Engineering', Vol. 40, 319-342 (1997).
- [Pu] Pujols, A., 'Time Dependent Integral Method for Maxwell Equations', Math. and Num. Aspects of Wave Prop. Phenomena, Schönbourg, 1991.
- [Ry1] Rynne, B.P., 'Instabilities in time-marching methods for scattering problems', Electromagnetics 6, 129-144, 1986.
- [Ry2] Rynne, B.P., 'Time domain scattering from arbitrary surfaces using the electric field equation', J. Electromag. Waves Appl. 5, 93-112, 1991.
- [Ry3] Rynne, B.P., 'Stability and convergence of time marching methods in scattering problems', IMA J. Appl. Math., 35, 297-310, 1985.
- [RySm] Rynne, B.P., Smith, P.D., 'Stability of Time Marching Algorithms for the Electric Field Integral Equation', Journal of Electromagnetic Waves and Applications, Vol. 4, No 12, 1181-1205, 1990.
- [Sc] Schwartz, L., '*Théorie des distributions*', Hermann, Paris, 1951.
- [Tr] Trèves, F., '*Basic linear partial differential equations*', Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975.
- [Wal] Walter, W., '*Einführung in die Theorie der Distributionen*', B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 1994.
- [Wa] Wang, C.C., '*Mathematical Principles of Mechanics and Electromagnetism - Part B, Electromagnetism and Gravitation*', Plenum Press, New York, 1979.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, daß die vorliegende Diplomarbeit selbständig von mir verfaßt worden ist und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt wurden.

Kiel, den 9. Juni 1999