ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. PATRICK DONDL
STEPHAN WOJTOWYTSCH

SoSe 2016

Funktionalanalysis
Blatt 1
Abgabe: 27. April 2016 im entsprechenden Kasten vor dem CIP-Pool, 2. OG, HH 10

- **Einführung**
  - Funktionalanalysis: Analysis in unendlich-dimensionalen Vektorräumen.
  - **Lineare Funktionalanalysis**: Lineare Algebra in ∞-dimensionalen Vektorräumen.
  - Wir brauchen mehr Struktur:
    * Topologische Vektorräume (Vektorraumoperationen sind stetig)
    * Normierte, metrische und Skalarprodukt- Vektorräume
    * Lokalkonvexe Räume (Die Null hat eine Umgebungsbasis aus "schönen" konvexen Mengen/die Topologie wird von einer Familie von Halbnormen induziert)
    * Frechét-Räume (Lokalkonvex und haben eine vollständige translationsinvariante Metrik)
    * **Banach-Räume** (normiert und vollständig)
    * **Hilbert-Räume** (Skalarprodukt und vollständig)
    * Banach-Algebren (Banach-Räume mit multiplikativer Zusatzstruktur, z.B. Operatorenräume und manche Funktionenräume)
  - Fragen: Sei X ein Vektorraum, $A : X \to X$ linear und injektiv. Ist A auch surjektiv? Ist A stetig? Gibt es eine (stetige) lineare Inverse? usw.

- **Ein schlechter Raum für den Laplace-Operator.** *Dieses Beispiel wird in der ersten Woche in den Übungsgruppen besprochen und muss nicht individuell bearbeitet werden.*

  Wir zeigen, dass der Laplaceoperator $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ als linearer Operator

  $$\Delta : X \to Y, \quad X = \{u \in C^2(U) \cap C(\overline{U}) \mid u = 0 \text{ auf } \partial U\}, \quad Y = C(U)$$

  zwischen Funktionenräumen X, Y für offene Mengen in $\mathbb{R}^n$ injektiv, aber nicht surjektiv ist. Der Einfachheit halber sei $U = B_2(0) \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Kreisscheibe, $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ sodass

  $$\eta(x,y) = \begin{cases} 0 & \sqrt{x^2+y^2} \geq 2 \\ 1 & \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \end{cases}.$$

  Wähle $g(x,y) = xy$ und setze

  $$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\Delta(\eta g)\right] (2^k x, 2^k y).$$

  Man beachte, dass der Laplace vor der Reskalierung angewandt wird. Wir werden zeigen, dass

  (i) Der Laplace-Operator ist eine stetige injektive Abbildung von X nach Y,
  (ii) $f \in C(\overline{U}) \subset Y$ und
  (iii) Es existiert kein $u \in Y$ sodass $\Delta u = f$.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** *Konvergenz von Teilfolgen*
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $x \in X$. Zeigen Sie: Wenn jede Teilfolge von (x_k) eine weitere Teilfolge enthält, die gegen x konvergiert, so konvergiert die gesamte Folge gegen x.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** *Der Abschluss*
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

(a) Zeigen Sie, dass der Abschluss einer Menge $Z \subset X$ die kleinste abgeschlossene Menge ist, die Z enthält:

$$\overline{Z} = \bigcap_{\{A\in 2^X \mid A^c\in\mathcal{T},\, Z\subset A\}} A.$$

(b) Welche der folgenden Identitäten gelten?

(i) $\overline{Z^\circ} = \overline{Z}$ (ii) $\left(\overline{Z}\right)^\circ = Z^\circ$ (iii) $Z^\circ = \left(\overline{Z^c}\right)^c$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** *Metriken*
(X, d) sei ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass es eine Metrik d' auf X gibt, die die gleiche Topologie induziert wie d, sodass

$$\sup_{x,y\in X} d'(x, y) \leq 1.$$

Aufgabe 4 (4 + 2* Punkte)**.** *Funktionen auf metrischen Räumen*
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Ist $K \subset X$ abgeschlossen, so gibt es eine stetige Funktion $\psi_K : X \to [0, \infty)$, sodass $K = \{\psi = 0\} = \{x \in X \mid \psi(x) = 0\}$ ist.

(b) Sind $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt, so gibt es eine stetige Funktion $\phi_{A,B} : X \to [-1, 1]$ sodass $\phi_{A,B} \equiv 1$ auf A und $\phi_{A,B} \equiv -1$ auf B.

(c*) Sei $K \subset X$ abgeschlossen, $f : K \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Zeigen Sie, dass es eine stetige Funktion $\bar{f} : X \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $\bar{f}|_K = f$ und $\sup \bar{f} = \sup f$, $\inf \bar{f} = \inf f$.

Hinweis: Betrachten Sie $\tilde{f} := f - \frac{\sup f + \inf f}{2}$ und die Funktion $\phi_{A,B}$ für die Mengen

$$A := \left\{\tilde{f} \geq ||\tilde{f}||/3\right\}, \qquad B := \left\{\tilde{f} \leq -||\tilde{f}||/3\right\} \subset X.$$

Untersuchen sie

$$\tilde{f} - \frac{||\tilde{f}||}{3}\,\phi_{A,B}.$$

Iterieren Sie den Approximationsvorgang und benutzen sie, dass der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge gleichmäßig beschränkter stetiger Funktionen stetig ist.