ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG SoSe 2016
MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF.DR. PATRICK DONDL
STEPHAN WOJTOWYTSCH

Funktionalanalysis
Blatt 2
Abgabe: Mittwoch, 4. Mai 2016 bis 12:00

Räume stetiger Funktionen

Aufgabe 5 (4 Punkte). *Der Satz von Arzelà-Ascoli*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und f_n eine Folge im Banachraum $C(\overline{\Omega})$ der stetigen Funktionen von $\overline{\Omega}$ nach $\mathbb{R}$. Nehmen Sie an, dass die Folge folgende Eigenschaften hat:

(1) Sie ist gleichmäßig beschränkt, d.h. für jedes $x \in \overline{\Omega}$ gibt es $L_x > 0$, sodass $|f_n(x)| \leq L_x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und
(2) sie ist gleichgradig stetig, d.h. für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ sodass
$$d(x,y) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$$
für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass f_n eine konvergente Teilfolge hat. Anleitung:

(a) Zeigen Sie: Es existiert $L > 0$ sodass $|f_n(x)| \leq L$ für alle $x \in \overline{\Omega}$, $n \in \mathbb{N}$.
(b) Wählen Sie eine abzählbare dichte Menge $D = \{x_1, x_2, \dots\}$ in $\overline{\Omega}$. Zeigen Sie, dass es eine Teilfolge von f_n und $\alpha_k \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f_n(x_k) \to \alpha_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ konvergiert. Tipp: Diagonalfolge.
(c) Zeigen Sie, dass die Funktion $\tilde{f} : D \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x_k) = \alpha_k$ eine eindeutige stetige Fortsetzung f auf $\overline{\Omega}$ hat.
(d) Zeigen Sie, dass die Teilfolge, die Sie ausgewählt haben, auf $\overline{\Omega}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 6 (4 + 2* Punkte). *Hölder-Räume*
Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $\alpha \in (0,1]$. Wir definieren den Raum
$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ f \in C(\overline{\Omega}) \ : \ \sup_{x \neq y \in \overline{\Omega}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}.$$

(a) Sei $I = [-1,1]$, $\alpha \in (0,1]$ und
$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \qquad g_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \log(x) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$
Zeigen Sie: f_α liegt in $C^{0,\beta}(I)$ genau dann, wenn $\beta \leq \alpha$. g_α liegt in $C^{0,\beta}(I)$ genau dann, wenn $\beta < \alpha$. Hinweis: L'Hospital.
(b) Zeigen Sie, dass die Räume $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ Banachräume sind mit der Norm
$$|f|_{0,\alpha} := |f| + [f]_\alpha := \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)| + \sup_{x \neq y \in \overline{\Omega}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$
(c) Sei f_n eine Funktionenfolge, sodass $|f_n|_{0,\beta}$ beschränkt ist für $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Zeigen Sie, dass $f \in C^{0,\beta}$ existiert, sodass $f_n \to f$ bezüglich der $C^{0,\alpha}$-Norm. Tipp: Betrachten Sie zunächst nur gleichmäßige Konvergenz und benutzen Sie Aufgabe 5.
(d*) Es sei Ω offen, beschränkt und konvex (d.h. $\lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$ für alle $\lambda \in (0,1)$ und $x, y \in \Omega$). Zeigen Sie, dass $C^1(\overline{\Omega}) \subset C^{0,1}(\overline{\Omega})$ und
$$|f|_{0,1} \leq |f| + |\nabla f| \qquad \forall\ f \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** *Separabilität*

(a) Sei Ω in $\mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeigen Sie: $C(\overline{\Omega})$ ist separabel.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ ist separabel.

Tipp: Stone-Weierstrass.

Aufgabe 8 (4 + 2* Punkte)**.** *Affine Hyperebenen*

Es sei X ein Banachraum über $\mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ linear, $\alpha \in \mathbb{R}$. Eine *affine Hyperebene* ist eine Menge der Form $H = \{x \in X \ : \ f(x) = \alpha\}$. Zeigen Sie:

(i) Die Hyperebene H ist genau dann abgeschlossen, wenn f stetig ist.

(ii*) Eine Hyperebene H ist immer entweder abgeschlossen oder dicht in X.

Tipp: Zeigen Sie, dass auch die Hyperebenen $\{f = \beta\}$ für alle $\beta \in \mathbb{R}$ abgeschlossen sind. Für die Stetigkeit von f reicht es aus zu zeigen, dass die Urbilder von Intervallen offen sind, da diese eine Basis der Topologie auf $\mathbb{R}$ bilden.
Für den zweiten Teil hilft es zu zeigen, dass es anderenfalls $v_1 \in \overline{H}$ und $v_2 \in X \setminus \overline{H}$ gibt, sodass $f(v_1) = f(v_2) = 1$ ist.

Aufgabe 9 (7* Punkte)**.** *Eine nicht-normierbare Metrik*

Sei $I = (-1, 1)$ und

$$X = C_0^\infty(I) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid u \equiv 0 \text{ außerhalb von } I\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung

$$d : X \times X \to \infty, \qquad d(f,g) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \, \frac{|\, f^{(k)} - g^{(k)}|}{1 + |\, f^{(k)} - g^{(k)}|}$$

ist eine Metrik. Hier ist $|\cdot|$ die Supremumsnorm und $f^{(k)}$ die k-te Ableitung von f.

(b) Die Vektoraddition und Skalarmultiplikation sind stetig bezüglich der Metrik d.

(c) $f_n \to 0$ in (X, d) genau dann wenn alle Ableitungen von f_n gleichmäßig gegen 0 konvergieren.

(d) Wenn eine Menge $U \subset X$ offen ist bezüglich d, dann existieren für jedes $f \in U$ Parameter $m \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$, sodass für $g \in X$ gilt:

$$|f - g|_m := \sum_{k=0}^{m} |f^{(k)} - g^{(k)}| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad g \in U.$$

(e) Wenn eine Norm $||\cdot||$ auf X die gleiche Konvergenz wie d induziert, so gibt es $C > 0$ und $m \in \mathbb{N}$, sodass

$$||f|| \leq C\,|f|_m \qquad \forall \ f \in X.$$

(f) Folgern Sie, dass es keine solche Norm gibt. Tipp: Betrachten Sie Funktionen vom Typ $\lambda^\alpha f(x/\lambda^\beta)$ für geeignete $\alpha, \beta > 0$.

(g) Mit der gegebenen Metrik ist $C_0^\infty(I)$ der Abschluss von $C_c^\infty(I)$, des Unterraums der Funktionen mit kompaktem Träger in I:

$$C_c^\infty(I) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \exists \ -1 < a < b < 1 \ \text{ sodass } f \equiv 0 \text{ außerhalb von } [a,b]\}\,.$$