Albert-Ludwigs-Universität Freiburg — SoSe 2016
Mathematisches Institut
Prof.Dr. Patrick Dondl
Stephan Wojtowytsch

Funktionalanalysis

Blatt 3

Abgabe: 11. Mai 2016 vor der Vorlesung

Prähilberträume und Räume integrierbarer Funktionen

Aufgabe 10 (4 Punkte)**.** *Konvexität*

Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). Eine Menge $E \subset X$ heisst *konvex* falls für alle $x, y \in E$ und für $\lambda \in [0,1]$ gilt $\lambda x + (1 - \lambda y) \in E$.

(i) Sei X ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass die *abgeschlossene Einheitskugel* $\overline{B_1(0)} = \{x : ||x|| \leq 1\}$ konvex ist.

(ii) Sei X ein Prähilbertraum. Zeigen Sie, dass $\overline{B_1(0)}$ strikt konvex im folgenden Sinn ist: falls $x, y \in \overline{B_1(0)}$, $x \neq y$ und $\lambda \in (0,1)$, so gilt $||\lambda x + (1-\lambda)y|| < 1$.
Tipp: Betrachten Sie die Funktion $f(\lambda) = ||\lambda x + (1-\lambda)y||^2$ und deren zweite Ableitung.

Aufgabe 11 (4 Punkte)**.** *Isometrie im Prähilbertraum*

Sei H ein Prähilbertraum und sei $T\colon H \to H$ eine Isometrie, d.h. $||T(x) - T(y)|| = ||x - y||$ $\forall x, y \in H$. Zeigen Sie: T ist affin, d.h.

$$T(x) = Lx + x_0,$$

wobei $L\colon H \to H$ linear ist und $x_0 \in H$.

(i) Reduktion:
Beweisen Sie die Behauptung: Zum Beweis der Affinität genügt zu zeigen, dass für $\lambda \in (0,1)$ und $x, y \in H$ gilt

$$z = \lambda x + (1-\lambda)y \Rightarrow T(z) = \lambda T(x) + (1-\lambda)T(y). \tag{1}$$

(ii) Zeigen Sie (1).

Tipp: $z := \lambda x + (1-\lambda)y$, $d := ||x - y||$. Es gilt dann $z \in \overline{B_{(1-\lambda)d}(x)} \cap \overline{B_{\lambda d}(y)}$. Weiterhin, $||T(y) - T(x)|| = d$; $||T(z) - T(x)|| = (1-\lambda)d$; $||T(z) - T(y)|| = \lambda d$. Zeigen Sie, dass das nur für $T(z) = \lambda T(x) + (1-\lambda)T(y)$ gelten kann, benutzen Sie dafür Aufgabe 8 (ii).

Aufgabe 12 (4 Punkte)**.** *L^p ist ein normierter Vektorraum*

(a) Beweisen Sie die Young'sche Ungleichung für $1 < p < \infty$ und $p' = \frac{p}{p-1}$ sodass $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$:

$$ab \leq \frac{1}{p}\,a^p + \frac{1}{p'}\,b^{p'} \qquad \forall\ a, b \geq 0$$

Hinweis: Die Logarithmus-Funktion ist konkav.

(b) Es sei $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $1 \leq p \leq \infty$. Zeigen Sie die Hölder-Ungleichung

$$\int_\Omega fg\,\mathrm{d}\mu \leq ||f||_p\,||g||_{p'} \qquad \forall\ f \in L^p(\mu), g \in L^{p'}(\mu)$$

wobei $1' = \infty$, $\infty' = 1$. Hinweis: Young'sche Ungleichung.

(c) Es sei $1 \leq p \leq \infty$. Zeigen Sie: $L^p(\mu)$ ist ein Vektorraum und $||\cdot||_p$ ist eine Norm auf $L^p(\mu)$. Hinweis: Hölder-Ungleichung.

Aufgabe 13 (4 Punkte)**.** *Konvergenz fast überall*

(a) Konstruieren Sie eine messbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ und eine Folge messbarer Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, sodass f_n *nicht* fast überall gegen f konvergiert, aber jede Teilfolge von f_n eine weitere Teilfolge hat die fast überall gegen f konvergiert.

(b) Folgern Sie, dass Konvergenz fast überall nicht von einer Topologie induziert wird. Hinweis: Aufgabe 1.

Aufgabe 14 (4* Punkte)**.** *Isometrische Einbettungen*

(a) Zeigen Sie, dass jeder metrische Raum (X, d) isometrisch in einen Banachraum V eingebettet werden kann, d.h. es gibt eine Abbildung

$$i : X \to V \quad \text{sodass} \quad ||\, i(x) - i(y)\, || = d(x,y) \quad \forall\; x, y \in X.$$

(b) Folgern Sie, dass jeder metrische Raum isometrisch ist zu einer dichten Teilmenge eines vollständigen metrischen Raums ist.

(c) Nehmen Sie an, dass $X = H$ sogar ein Prähilbertraum ist. Vergleichen Sie mit Aufgabe 11: Ist eine isometrische Einbettung $i : H \to V$ in einen anderen Banachraum V notwendigerweise linear?

Tipp: Betrachten Sie den Raum der stetigen und beschränkten Funktionen auf X und die Distanzfunktion von einem Punkt. Diese Aufgabe hat nichts mit der beschränkten Distanzfunktion aus Aufgabe 3 zu tun und funktioniert mit einem Trick auch, wenn d auf $X \times X$ unbeschränkt ist.