Albert-Ludwigs-Universität Freiburg — SoSe 2016
Mathematisches Institut
Prof.Dr. Patrick Dondl
Stephan Wojtowytsch

Funktionalanalysis

Blatt 4

Abgabe: 18. Mai 2016 vor der Vorlesung

L^p-Räume, die zweite

Aufgabe 15 (4 Punkte)**.** *Ein Kriterium für L^∞-Funktionen*
Es sei $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie, dass $f \in L^\infty(\mu)$ genau dann, wenn $f \in L^p(\mu)$ für alle $1 \leq p < \infty$ und $\sup_{p>1} ||f||_p < \infty$. Zeigen Sie weiterhin, dass dann

$$||f||_\infty = \lim_{p\to\infty} ||f||_p.$$

Aufgabe 16 (4 Punkte)**.** *Eine erweiterte Hölder-Ungleichung*
Es seien $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $1 \leq p, p_i \leq \infty$ sodass $\sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} = \frac{1}{p} \leq 1$ und $f_i \in L^{p_i}(\mu)$ Funktionen, $1 \leq i \leq k$. Setzen Sie

$$f := \prod_{i=1}^k f_i$$

punktweise und zeigen Sie, dass $f \in L^p(\mu)$ und dass

$$||f||_p \leq \prod_{i=1}^k ||f_i||_{p_i}.$$

Bemerkung: Sie dürfen als bekannt voraussetzen, dass Produkte messbarer Funktionen messbar sind.

Aufgabe 17 (4 Punkte)**.** *Eine Interpolationsungleichung*
Es sei $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Nehmen Sie an, dass $1 \leq p < q < r \leq \infty$ und dass $f \in L^p(\mu) \cap L^r(\mu)$. Wählen Sie $\alpha \in (0, 1)$ sodass

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{r}$$

und zeigen Sie dass $f \in L^q(\mu)$ und

$$||f||_q \leq ||f||_p^\alpha \, ||f||_r^{1-\alpha}.$$

Aufgabe 18 (4 Punkte)**.** *L^p für endliche, atomare unendliche und Lebesgue-Maße*
Es sei $1 \leq p < q \leq \infty$.

(a) Es sei $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Zeigen Sie, dass für $f \in L^q(\mu)$ auch gilt, dass

$$f \in L^p(\mu), \qquad \exists\, c_{p,q,\mu} > 0 \text{ sodass } \quad ||f||_p \leq c_{p,q,\mu}\, ||f||_q.$$

Finden Sie $c_{p,q,\mu}$.

(b) Es sei $(\Omega, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{N}, 2^\mathbb{N}, \mu_\mathbb{N})$ wobei $\mu_\mathbb{N}(\{n\}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist (also $L^p(\mu_\mathbb{N}) = l^p$). Zeigen Sie, dass umgekehrt

$$f \in L^p(\mu_\mathbb{N}) \quad \Rightarrow \quad f \in L^q(\mu_\mathbb{N}),$$

dass es aber keine Konstante $c > 0$ gibt sodass $||f||_q \leq c\, ||f||_p$ gilt.

(c) Es sei $(\Omega, \mathcal{M}, \mu) = ((0, \infty), \mathcal{B}, \mathcal{L}^1)$ die reelle Halbgerade mit dem Lebesgue-Maß. Finden Sie messbare Funktionen f, g auf Ω sodass

$$(i)\ f \in L^p(\mu),\ f \notin L^q(\mu), \qquad (ii)\ g \notin L^p(\mu),\ g \in L^q(\mu).$$