Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Patrick Dondl
Stephan Wojtowytsch

SoSe 2016

# Funktionalanalysis

Blatt 5

Abgabe: 1. Juni 2016 vor der Vorlesung

*Lineare Abbildungen*

**Aufgabe 19** (4 Punkte). *Merkwürdige lineare Abbildungen, Teil I*
Geben Sie ein Beispiel von einem Banachraum $V$ und einer linearen Abbildung $A : V \to V$, die

(a) stetig und injektiv, aber nicht surjektiv,
(b) stetig und surjektiv, aber nicht injektiv,

ist.

(c) Geben Sie ein Beispiel zweier Banachräume $X, Y$ und einer linearen Abbildung $A : X \to Y$, die überall auf $X$ definiert, aber nicht stetig ist.
(d) Es sei $X = \{f \in C([0,1]) \mid f(0) = 0\}$ mit der sup-Norm und $A : X \to \mathbb{R}$ definiert durch $Af = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Zeigen Sie, dass $X$ ein Banachraum und $A$ stetig und linear ist. Zeigen Sie weiter, dass es kein Element $f \in X$ gibt, sodass
$$||f|| = 1, \qquad |Af| = ||A||.$$

Tipp: Denken Sie an Aufgabe 18.

**Aufgabe 20** (4 Punkte). *Merkwürdige lineare Abbildungen, Teil II*
Definieren Sie $A : l^2 \to l^2$ durch
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{bzw.} \qquad (Ax)_n = \frac{x_n}{n}.$$

Zeigen Sie:

(a) $A$ ist stetig und linear,
(b) die Range von $A$, $\mathcal{R}(A) := A(l^2)$, ist dicht in $l^2$, aber
(c) $\mathcal{R}(A) \neq l^2$.
(d) $\overline{A(B_1(0))} \subset l^2$ ist kompakt. Hinweis: Betrachten Sie zunächst $x^k \in B_1(0) \subset l^2$ und eine Diagonalfolge, sodass $x_n^k \to x^k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert. Nach Stetigkeit gilt $A(\overline{B_1(0)}) \subset \overline{A(B_1(0))}$. Bemerkung: Man sagt, dass $A$ eine kompakte Abbildung ist.

**Aufgabe 21** (4 + 2* Punkte)**.** *Lokalkonvexe Räume*
Eine Halbnorm auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$ ist eine Abbildung

$$p : V \to [0, \infty) \qquad \text{sodass} \qquad p(x + y) \le p(x) + p(y) \qquad \text{und} \qquad p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V$. Ein lokalkonvexer Raum ist ein Vektorraum $X$ mit einer Familie von Halbnormen $p_\alpha, \alpha \in A$ für eine beliebige Indexfamilie $A$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine eindeutige gröbste Topologie $\mathcal{T}$, bezüglich derer alle Halbnormen und ihre Translationen $x \mapsto p_\alpha(x - y)$ $(\alpha \in A, y \in X)$ stetig sind. Wann ist diese Topologie Hausdorff? Hinweis: Der Schnitt beliebig vieler Topologien ist eine Topologie.

(b) Die Mengen

$$U_{x,\epsilon;\alpha_1,\dots,\alpha_k} := \{y \in X \mid p_{\alpha_i}(x - y) < \epsilon, \quad i = 1, \dots, k\}$$

bilden eine Basis von $\mathcal{T}$.

(c) Es seien $X, Y$ lokalkonvexe Räume mit Familien von Halbnormen $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ und $\{q_\beta\}_{\beta\in B}$. Eine lineare Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig genau dann, wenn es für jedes $\beta$ endlich viele Halbnormen $p_{\alpha_1}, \dots, p_{\alpha_n}$ und $C > 0$ gibt, sodass

$$q_\beta \circ f \le C\,(p_{\alpha_1} + \cdots + p_{\alpha_n}).$$

(d) Die Vektorraumoperationen Vektoraddition und Skalarmultiplikation sind stetig in lokalkonvexen Räumen.

(e*) Zeigen Sie: Der Raum $X$ ist metrisierbar genau dann, wenn er Hausdorff ist und es eine abzählbare Unterfamilie gibt, die die Topologie auf $X$ induziert. Bemerkung: Ist der assoziierte metrische Raum vollständig, so heisst $X$ Fréchet-Raum. Tipp: Betrachten Sie Kugeln $B_{1/n}(0)$.

Bemerkung: In Aufgabe 9 haben wir ein Beispiel eines Fréchet-Raums gesehen, der kein Banachraum ist. Im Wesentlichen betrachten wir lokal-konvexe Räume deshalb, weil Räume wie $C^\infty$ und $C_c^\infty$ keine Banachraum-Struktur zulassen.
Auch die schwache und die schwach-* Topologie, die wir demnächst kennenlernen werden, induzieren eine lokalkonvexe Struktur.
Interessenterweise gibt es aber durchaus Banachräume sogar analytischer Funktionen, beispielsweise die holomorphen Selbstabbildungen der Einheitsscheibe in $\mathbb{C}$ oder Räume beschränkter harmonischer Funktionen auf beschränkten Gebieten.

**Aufgabe 22** (4 Punkte)**.** *Eine interessante lineare Abbildung, Teil I*
Es sei

$$\mathcal{S} := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \mid p_{\alpha,m}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f(x)|\,(1+|x|^2)^{m/2} < \infty \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n, m \in \mathbb{N}\}$$

der Raum aller Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{C}$, die gemeinsam mit ihren Ableitungen schneller als polynomiell abfallen. Definieren Sie

$$[\mathcal{F}(f)](\xi) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, \mathrm{d}x.$$

Wir kürzen auch $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ ab. Zeigen Sie, dass

(a) $\mathcal{S}$ mit der Familie $\{p_{\alpha,m}\}_{(\alpha,m)\in\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}}$ ein lokalkonvexer Hausdorff Raum ist.

(b) $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ wohldefiniert, linear und stetig ist, sowie

$$[\mathcal{F}(\partial_{x_i} f)](\xi) = i\,\xi_i\,\mathcal{F}(f)(\xi) \quad \text{und} \quad \mathcal{F}\big(x \mapsto i\,x_i f(x)\big) = -\partial_{\xi_i}[\mathcal{F}f(\xi)] \qquad \forall\ f \in \mathcal{S}.$$

(c) $\mathcal{F}$ ist invertierbar und $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist gegeben durch

$$[\mathcal{F}^{-1}(g)](x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\, e^{i\langle x,\xi\rangle}\, \mathrm{d}\xi.$$

Hinweis: Approximieren Sie mit dem Satz von Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-\epsilon^2\,|\xi|^2/2} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} f(y)\,\mathrm{d}y$$

um den Satz von Fubini anwenden zu können und benutzen Sie, dass $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2/2}\mathrm{d}z = (2\pi)^{n/2}$, sowie OBdA $z = |z|\, e_1$ und

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle z,\eta\rangle} e^{-|\eta|^2/2}\,\mathrm{d}\eta &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,|z|\,t - t^2/2} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-(\eta_2^2+\cdots+\eta_n^2)/2} \mathrm{d}\eta_2 \ldots \mathrm{d}\eta_n \right) \mathrm{d}t \\
&= (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,|z|\,t - t^2/2}\,\mathrm{d}t \\
&= (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[(it+|z|)^2 - |z|^2]/2}\,\mathrm{d}t \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-|z|^2/2}.
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt kann beispielsweise mit dem Cauchy'schen Integralsatz gerechtfertigt werden oder über den Eindeutigkeitssatz von Picard Lindelöff, wenn wir das Integral als Funktion von $z$ auffassen und ableiten. Die Identität darf hier vorausgesetzt werden.

Bemerkung: Die Abbildung $\mathcal{F}$ heißt Fourier-Transformation. Die inverse Transformation $\mathcal{F}^{-1}$ motiviert das Interesse an der Abbildung in Analogie zu Fourierreihen. Während wir auf $[-\pi, \pi]$ Funktionen in Summen von Termin wie $\sin(nx)$ und $\cos(nx)$ bzw. äquivalent $e^{inx}$ zerlegen können

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{-iny}\,\mathrm{d}y$$

benöbigen wir auf $\mathbb{R}$ alle (überabzählbar) vielen Frequenzen $e^{ix\xi}$, und somit ein Integral:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\,\mathrm{d}\xi, \qquad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)\, e^{i\langle y,\xi\rangle}\,\mathrm{d}y.$$

$\hat{f}(\xi), \xi \in \mathbb{R}$ spielt hier die Rolle der Fourierkoeffizienten $c_n, n \in \mathbb{Z}$.