Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Patrick Dondl
Stephan Wojtowytsch

SoSe 2016

Funktionalanalysis
Blatt 6
Abgabe: 8. Juni 2016 vor der Vorlesung

Die Hahn-Banach Sätze

Aufgabe 23 (4 Punkte). *Hahn-Banach in normierten und komplexen Räumen*

Sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum, $Y \subset X$ ein linearer Unterraum. Zeigen Sie:

(i) Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Ein stetiges lineares Funktional $g : Y \to \mathbb{R}$, mit Norm $||g|| = \sup_{x\in Y, ||x||\leq 1} |g(x)|$ lässt sich auf X normgleich fortsetzen.

(ii) Sei Y nun ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und sei $g : Y \to \mathbb{C}$ linear und stetig. Setzen Sie $h = \mathrm{Re}(g)$. Dann gilt $g(x) = h(x) - ih(ix)$ für alle $x \in Y$ und $\|g\| = \|h\|$ (mit der Norm von (i)).

(iii) Folgern Sie damit, dass sich jede stetige lineare Abbildung $g : Y \to \mathbb{C}$ auf einem Untervektorraum $Y \subset X$, (X komplex und normiert) zu einer stetigen linearen Abbildung $f : X \to \mathbb{C}$ mit $\|f\| = \|g\|$ fortsetzen lässt.

(iv) Folgern Sie, dass es für $x_0 \in X$ und eine offene konvexe Menge $C \subset X$ mit $x_0 \notin C$ eine stetige lineare Abbildung $f : X \to \mathbb{C}$ gibt, sodass $\mathrm{Re}\, f(x) < \mathrm{Re}\, f(x_0)$ für alle $x \in C$.

(v) Es sei X ein lokalkonvexer Raum, $V \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum und $f : V \to \mathbb{R}$ linear und stetig. Zeigen Sie, dass es eine stetige lineare Abbildung $\bar{f} : X \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $\bar{f}|_V = f$.

Aufgabe 24 (4+2* Punkte). *Trennung von konvexen Mengen im Endlichdimensionalen*

Es sei X ein endlichdimensionaler, reeller, normierter Vektorraum. Weiter sei $C \subset X$ konvex und nicht leer und es gelte $0 \notin C$. Wir wollen zeigen, dass es immer, d.h. ohne weitere Annahmen, eine abgeschlossene Hyperebene gibt, die C von 0 trennt.

(i) Zeigen Sie: Jede Hyperebene in X ist abgeschlossen.

(ii) Es sei $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine dichte und abzählbare Teilmenge von C (warum existiert eine solche Menge?). Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$C_n := \mathrm{conv}\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

die konvexe Hülle der Punkte x_1 bis x_n. Zeigen Sie, dass C_n kompakt ist und $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ dicht in C liegt.

(iii) Zeigen Sie: Es existieren $f_n \in X'$, so dass

$$||f_n|| = 1 \quad \text{und} \quad f_n(x) > 0\ \forall x \in C_n.$$

(iv) Zeigen Sie: Es existiert $f \in X'$, so dass

$$||f|| = 1 \quad \text{und} \quad f_n(x) \geq 0\ \forall x \in C.$$

(v*) Seien A und B konvexe, nicht leere und disjunkte Teilmengen von X. Zeigen Sie, dass eine abgeschlossene Hyperebene existiert, die A von B trennt.

Aufgabe 25 (4+2* Punkte). *Ein Gegenbeispiel im Unendlichdimensionalen*

Es sei $X = l^1$, der Raum der absolut summierbaren Folgen (mit der Norm $||(x_j)_{j\in\mathbb{N}}||_{l^1} = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$). Betrachten Sie die beiden Teilmengen

$$A := \{a = (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in X : a_{2j} = 0\ \forall j \in \mathbb{N}\}$$

und

$$B := \{b = (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in X : b_{2j} = \frac{1}{2^j} b_{2j-1} \ \forall j \in \mathbb{N}\}$$

(i) Zeigen Sie: A und B sind abgeschlossene Unterräume von X und es gilt

$$\overline{A+B} = X.$$

(ii) Sei $c \in X$ definiert als $c_{2j-1} = 0$ und $c_{2j} = \frac{1}{2^j}$ für $j \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $c \notin A + B$.

(iii*) Es sei $C = A - c$. Zeigen Sie dass gilt $B \cap C = \emptyset$. Existiert eine abgeschlossene Hyperebene, die B von C trennt?

Hinweis: $A + B$ ist die direkte Summe der Räume A und B, also alle $x \in X$, so dass $a \in A$ und $b \in B$ existieren mit $x = a + b$.

Aufgabe 26 (4 Punkte)**.** *Beschränkte Mengen in topologischen Vektorräumen*
Es sei X ein topologischer Vektorraum, d.h. ein Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ mit einer Topologie, sodass Vektoraddition und Skalarmultiplikation bezüglich der jeweiligen Produkttopologie stetig sind. Eine Menge $B \subset X$ heißt beschränkt, wenn für jede Umgebung U des Nullvektors ein $\lambda > 0$ existiert, sodass

$$\lambda B \subset U.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\{x\}$ ist beschränkt für alle $x \in X$.
(b) Eine Teilmenge B eines normierten Vektorraums ist genau dann beschränkt, wenn $\sup_{x\in B} ||x|| < \infty$.
(c) Ein topologischer Vektorraum ist genau dann normierbar, wenn er Hausdorff'sch ist und es eine beschränkte konvexe Umgebung der Null gibt. Hinweis: Erinnern Sie sich an dass Minkowski-Funktional.

Aufgabe 27 (4* Punkte)**.** *Eine interessante lineare Abbildung, Teil II*

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

eine stetige lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $f, g \in \mathcal{S}$ und $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$, $\hat{g} = \mathcal{F}(g)$ gilt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)\,g(y)\,\mathrm{d}y.$$

(c) Folgern Sie, dass sich $\mathcal{F}$ zu einer linearen Abbildung $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen lässt, sodass

$$||\,\mathcal{F}(f)\,||_{L^2}^2 = 2\pi\,||f||_{L^2}^2$$