

Funktionalanalysis

Blatt 7

Abgabe: 15. Juni 2016 vor der Vorlesung

Der Satz von Banach-Steinhaus

Aufgabe 28 (4 Punkte). *Der Satz von Hellinger-Töplitz*

Sei $(H, (\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum, $A : H \rightarrow H$ linear und symmetrisch, also

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{für alle } x, y \in H.$$

Beweisen Sie, dass A stetig ist.

Aufgabe 29 (4 + 2* Punkte). *Inversion und Neumann-Reihe*

Es sei X ein Banachraum und $GL(X)$ die Menge der invertierbaren stetigen linearen Abbildungen $A : X \rightarrow X$. Wir wollen zeigen, dass $GL(X)$ eine topologische Gruppe und eine offene Teilmenge des Raums $\mathcal{L}(X, X)$ der stetigen linearen Selbstabbildungen von X ist. Anleitung:

- (a) Zeigen Sie, dass $GL(X)$ eine Gruppe ist.
- (b) Zeigen Sie, dass für $\|A\| < 1$ die Neumann-Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ in $\mathcal{L}(X, X)$ konvergiert und $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$.
- (c) Zeigen Sie, dass wenn $B \in GL(X)$ und $A \in \mathcal{L}(X, X)$ sodass $\|A - B\| < \frac{1}{\|B^{-1}\|}$, dann auch $A \in GL(X)$. Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $Ax = y \Leftrightarrow B(I + B^{-1}(A - B))x = y$.
- (d*) Zeigen Sie, dass $GL(X)$ eine topologische Gruppe ist, d.h. dass die Abbildungen $p : GL(X) \times GL(X) \rightarrow GL(X)$, $p(A, B) = A \circ B$ und $i : GL(X) \rightarrow GL(X)$, $i(A) = A^{-1}$ stetig sind.

Aufgabe 30 (4 Punkte). *Konvergenz von linearen Abbildungen*

Seien X, Y Banachräume, sei (T_n) Folge in $L(X, Y)$. Für jedes $x \in X$ konvergiere die Folge $(T_n(x))_n$ in Y , der Grenzwert werde mit Tx bezeichnet. Zeigen Sie:

- (i) $\sup_n \|T_n\| < \infty$,
- (ii) $T \in L(X, Y)$,
- (iii) $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$.

Aufgabe 31 (4 Punkte). *Der Dualraum von l^p*

Sei $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$. Der (reelle) Folgenraum l^p ist definiert als der Raum aller Folgen $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in \mathbb{R}$, so dass

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

endlich ist. Für $y \in l^{p'}$ definieren Sie

$$[\mathcal{J}(y)](x) := \sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k.$$

Zeigen Sie:

$$\mathcal{J} : l^{p'} \rightarrow (l^p)'$$

ist ein linearer isometrischer Isomorphismus.

Aufgabe 32 (4* Punkte). *Vollständigkeit ist notwendig*

- (a) (*Vollständigkeit im Zielraum*) Man betrachte den Raum $X = (C[0, 1], |\cdot|)$ der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$ mit der Supremumsnorm und $Y = (C[0, 1], \|\cdot\|_1)$ die gleiche Menge von Funktionen, aber mit der L^1 -Norm. Zeigen Sie, dass die Identitätsabbildung $i : X \rightarrow Y$ stetig, linear und bijektiv, aber nicht stetig invertierbar ist.
- (b) (*Vollständigkeit im Urbildraum*) Es sei $Y = l^2$ und X die Menge der l^2 -Funktionen mit folgender exotischen Norm:

$$|x| = \sum_{i \in I} |\alpha_i| \quad \text{wenn} \quad x = \sum_{i \in I} \alpha_i b_i$$

und $\{b_i\}_{i \in I}$ eine Hamelbasis (oder einfach Basis) ist, also eine Funktionenmenge, sodass jedes $x \in l^2$ eindeutig als eine Summe $x = \sum_{i \in I} \alpha_i b_i$ geschrieben werden kann, in der bloß endlich viele Koeffizienten α_i nicht null sind.

Für die Norm dürfen wir annehmen, dass außerdem $\|b_i\|_{l^2} = 1$ für alle $i \in I$, und dass das Orthonormalsystem $e_m = (\delta_{mk})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilmenge der Basis ist. Die Existenz einer solchen Hamelbasis darf vorausgesetzt werden (und folgt ähnlich wie der Satz von Hahn-Banach aus dem Zorn'schen Lemma).

Zeigen Sie, dass $(X, |\cdot|)$ ein normierter Vektorraum ist und dass die Identitätsabbildung $i : X \rightarrow Y$ stetig, linear und bijektiv, aber nicht stetig invertierbar ist.

Bemerkung: Man kann das Baire'sche Kategorienargument auch in einem anderen Kontext interessant anwenden. Nämlich kann man die Mengen aller stetigen Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten, deren Differenzenquotienten im Absolutbetrag von oben durch $n \in \mathbb{N}$ beschränkt sind. Diese Menge ist in den stetigen Funktionen abgeschlossen, aber indem man Oszillationen höherer und höherer Frequenz addiert, sieht man, dass sie kein Inneres hat.

Ähnlich kann man zeigen, dass die Menge der Funktionen f , die an einem Punkt x_f einen durch L_f beschränkten Differenzenquotienten haben, mager ist. Nun kann man folgern, dass es eine Funktion auf $\mathbb{R}$ gibt, die stetig, aber nirgends differentierbar ist.