Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Patrick Dondl
Stephan Wojtowytsch SoSe 2016

Funktionalanalysis

Blatt 8

Abgabe: 22. Juni 2016 vor der Vorlesung

Die schwache Topologie

Aufgabe 33 (4 Punkte)**.** *Schwache Topologie in endlichdimensionalen Räumen und Kompakta*

(a) Zeigen Sie, dass in einem endlichdimensionalen Banachraum die starke und die schwache Topologie übereinstimmen.

(b) Sei X ein Banachraum und sei $K \subset X$ kompakt bezüglich der starken (von der Norm induzierten) Topologie. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K, $x \in K$ so dass

$$x_n \rightharpoonup x \text{ schwach.}$$

Zeigen Sie, dass $x_n \to x$ (stark).

Aufgabe 34 (4 Punkte)**.** *Ein Kriterium für Stetigkeit linearer Operatoren*

Seien $(X, ||\cdot||_X)$ und $(Y, ||\cdot||_Y)$ Banachräume, sowie $T : X \to Y$ linear. Zeigen Sie dass gilt

$$T \text{ stark stetig} \iff (x_k \rightharpoonup x \Longrightarrow Tx_k \rightharpoonup Tx) \tag{1}$$

für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X und $x \in X$.

Bemerkung: Ein Operator, der die rechte Seite von (1) erfüllt heißt *schwach-schwach folgenstetig*.

Aufgabe 35 (4 Punkte)**.** *Schwach und schwach*

Finden Sie ein Gegenbeispiel, das folgende Aussage widerlegt:

Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $(\ell^2)'$ mit $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in ℓ^2 mit $x_n \rightharpoonup x$, so folgt

$$f_n(x_n) \to f(x).$$

Aufgabe 36 (4 Punkte)**.** *Das Lemma von Mazur*

Sei X ein Banachraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, so dass $x_n \rightharpoonup x$, $x \in X$, bezüglich der schwachen Topologie.

(i) Zeigen Sie, dass eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, in X existiert, so dass

a) $y_n \in \operatorname{conv}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} x_i\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

b) $y_n \to x$ stark.

(ii) Zeigen Sie, dass eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, in X existiert, so dass

a) $z_n \in \operatorname{conv}\left(\bigcup_{i=1}^{n} x_i\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

b) $z_n \to x$ stark.

Hinweis: $\operatorname{conv} A$ bezeichnet die konvexe Hülle der Menge A. Zeigen Sie zuerst, dass der starke und der schwache Abschluss einer konvexen Menge übereinstimmen.