Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Patrick Dondl
Stephan Wojtowytsch

SoSe 2016

Funktionalanalysis
Blatt 9
Abgabe: 29. Juni 2016 vor der Vorlesung

Die schwache Topologie, Teil II

Aufgabe 37 (4 Punkte)**.** *Schwache Konvergenz in den reflexiven ℓ^p*

Sei $1 < p < \infty$, $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\ell^p(\mathbb{K})$, also $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$. Sei $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $x^{(n)} \rightharpoonup y$ $(n \to \infty)$.

(ii) $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\ell^p(\mathbb{K})$ beschränkt und für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $x_i^{(n)} \to y_i$ $(n \to \infty)$.

Aufgabe 38 (4 Punkte)**.** *Ein nützliches Lemma*

Zeigen Sie das folgende Lemma:

Sei X ein Vektorraum über den reellen Zahlen und seien φ und $(\varphi_j)_{j=1}^n$ Linearformen auf X, sodass gilt

$$[\varphi_i(x) = 0 \ \forall i = 1, 2, ..., n] \Longrightarrow [\varphi(x) = 0]$$

Dann existieren $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$, so dass $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$. Tipp: Betrachten Sie die Funktion $F(x) = (\varphi(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))$ und trennen Sie einen Punkt vom Wertebereich ab.

Aufgabe 39 (4 Punkte)**.** *Die schwach$*$ Topologie*

Es sei X ein nicht-reflexiver Banachraum. Konstruieren Sie eine Hyperebene H in X', die stark und schwach, aber nicht schwach$*$ abgeschlossen ist. Können Sie auch eine Hyperebene konstruieren, die stark, aber nicht schwach abgeschlossen ist?

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Definition einer Hyperebene aus Aufgabe 8. Verwenden Sie ein Funktional $f \in X'' \setminus J(X)$ und zeigen Sie, dass das Komplement von $\{f = 0\}$ nicht schwach$*$ offen ist. Benutzen Sie die übliche Basis der schwach$*$ Topologie.

Aufgabe 40 (4 Punkte)**.** *Ein Satz von Helly*

Zeigen Sie den folgenden Satz: Sei X ein Banachraum, $f_1, ..., f_n \in X'$, $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$. Dann sind äquivalent:

(i) $\forall \varepsilon > 0 : \exists x_\varepsilon \in X, \|x_\varepsilon\| \leq 1 :$

$$|f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i| < \varepsilon.$$

(ii) $|\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i| \leq \|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\|_{X'} \quad \forall \beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{K}$.

Tipp: Für (i)$\Rightarrow$(ii) folgern Sie, dass $|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i(x_i) - \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i| < S\varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$ (für ein geeignetes $S \in \mathbb{R}$)und schätzen dadurch die linke Seite in (ii) ab. Für (ii)$\Rightarrow$(i) behandeln Sie zunächst den reellen Fall. Sie bemerken, dass die Aussage nichts anderes ist als $(\alpha_j)_{j=1}^n \in \overline{\varphi(B_1(0))}$ für $\varphi \colon X \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = (f_j(x))_{j=1}^n$ und führen einen indirekten Beweis in dem Sie α und $\overline{\varphi(B_1(0))}$ strikt trennen. Im komplexen nutzen Sie wie üblich die Isometrie zwischen $\mathbb{R}^{2n}$ und $\mathbb{C}^n$.