Albert-Ludwigs-Universität Freiburg SoSe 2016
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Patrick Dondl
Stephan Wojtowytsch

Funktionalanalysis
Blatt 11
Abgabe: 13. Juli 2016 vor der Vorlesung
Die schwache Topologie in L^p-Räumen. Hilbert Räume

Aufgabe 45 (4+2* Punkte). *Die Reflexivität von L^p*
Es sei $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum.

(a) Beweisen Sie, dass für $2 \leq p < \infty$ Clarkson's erste Ungleichung gilt:
$$\left|\left|\frac{f+g}{2}\right|\right|_p^p + \left|\left|\frac{f-g}{2}\right|\right|_p^p \leq \frac{1}{2}\left(||f||_p^p + ||g||_p^p\right)$$
für alle $f, g \in L^p(\mu)$.

(b) Zeigen Sie, dass $L^p(\mu)$ für $2 \leq p < \infty$ ein gleichmässig konvexer Vektorraum ist.

(c) Folgern Sie, dass $L^p(\mu)$ für $1 < p < \infty$ ein reflexiver Banachraum ist.

Aufgabe 46 (4 Punkte). *Starke und schwache Konvergenz in L^p, Teil I*
Es sei $1 < p < \infty$ und μ das Lebesguemass auf $(-1, 1)$.

(a) *(Oszillationen)* Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, messbare und nicht konstante periodische Funktion und $f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = f(nx)$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass f_n schwach, aber nicht stark in $L^p(-1,1)$ gegen eine konstante Funktion konvergiert.

(b) *(Konzentrationen)* Es sei $\eta \in C_c(\mathbb{R})$, $\eta \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \eta \,\mathrm{d}x = 1$. Definieren Sie $f_n(x) = [n\,\eta(nx)]^{1/p}$. Zeigen Sie, das f_n schwach, aber nicht stark, in $L^p(-1,1)$ gegen null konvergiert.

Aufgabe 47 (4 Punkte). *Starke und schwache Konvergenz in L^p, Teil II*
Es sei $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$, $1 < p < \infty$ und $f_n, f \in L^p(\mu)$ sodass

(1) $\limsup_{n\to\infty} ||f_n||_p < \infty$ (Ausschließen von Konzentrationen) und

(2) $f_n(x) \to f(x)$ punktweise für fast alle $x \in \Omega$ (Ausschließen von Oszillationen).

Zeigen Sie:

(a) $f_n \rightharpoonup f$ schwach in $L^p(\mu)$.

(b) $f_n \to f$ in $L^q(\mu)$ stark für alle $1 \leq q < p$.

Tipp: Nehmen Sie zunächst an, dass $M > 0$ und $|f_n)| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 48 (4 Punkte). *Projektion in Hilberträumen*

(a) Es seien $K \subset H$ sei abgeschlossen, nicht leer, konvex und $f \in H$. Zeigen Sie, dass ein eindeutiges $u \in K$ existiert, sodass
$$||u - f|| = \min_{v \in K} ||v - f||.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Re}(f - u, v - u) \leq 0$ für alle $v \in K$ ist.

(c) Ist $K \subset H$ sogar ein abgeschlossener Unterraum, so ist weiterhin $(f - u, v) = 0$ für alle $v \in K$.

Aufgabe 49 (4* Punkte). *Realisierung der Norm in Hilberträumen*

(a) Es sei H ein Hilbertraum, $x, y \in H$ und $f \in H'$, sodass
$$||f|| = 1, \qquad \langle f, x\rangle = ||x||, \qquad \langle f, y\rangle = ||y||.$$
Zeigen Sie, dass $\frac{x}{||x||} = \frac{y}{||y||}$ ist. Hinweis: Aufgabe 10.

(b) Es sei H ein Hilbertraum, $x \in H$, $x \neq 0$. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige lineare Abbildung $f \in H'$ gibt, sodass $||f|| = 1$, $f(x) = ||x||$ ist. Können Sie die Abbildung explizit angeben?