Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Patrick Dondl
Stephan Wojtowytsch

SoSe 2016

Funktionalanalysis

Freiwilliges Zusatzblatt, keine Abgabe

Die schwache Topologie ist nicht metrisierbar

Aufgabe 101 (0 Punkte)**.** *Die Hamelbasis*

Die Hamelbasis $\mathcal{B} \subset X$ eines Vektorraumes X über $\mathbb{K}$ ist definiert als eine Menge linear unabhänginger Vektoren[1] aus X, so dass jedes Element in X als endliche Linearkombination von Elementen aus $\mathcal{B}$ geschrieben werden kann.
In anderen Worten, für jedes $x \in X$ existieren eindeutige $n \in \mathbb{N}$, $c_i \in \mathbb{K}$, $b_i \in \mathcal{B}\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ so dass

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i b_i.$$

Zeigen Sie: Ist X ein unendlichdimensionaler Banachraum, so kann $\mathcal{B}$ keine abzählbare Menge sein.
Tipp: Benutzen Sie das Bairesche Kategorienargument.

Aufgabe 102 (0 Punkte)**.** *Dualraum eines unendlichdimensionalen Vektorraumes*

Zeigen Sie: Ist X ein unendlichdimensionaler Banachraum, so ist auch der Dualraum X' unendlichdimensional.

Aufgabe 103 (0 Punkte)**.** *Nichtmetrisierbarkeit der schwachen Topologie*

Sei X ein unendlichdimensionaler Banachraum. Wir zeigen durch ein Widerspruchsargument, dass keine Metrik $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ existiert, welche die schwache Topologie induziert.

Nehmen wir also an, d wäre eine solche Metrik.

(i) Für $k \in \mathbb{N}$ sei V_k eine Umgebung des Ursprungs bezüglich der schwachen Topologie, so dass

$$V_k \subset \{x \in X : d(x, 0) < \frac{1}{k}\}.$$

Zeigen Sie, das eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X' existiert, so dass jedes $g \in X'$ als *endliche* Linearkombination von Folgengliedern f_n geschrieben werden kann.

Tipp: Aufgabe 38.

(ii) Folgern Sie, dass X' von endlicher Dimension ist.

Tipp: Aufgabe 101.

(iii) Zeigen Sie den Widerspruch.

Tipp: Aufgabe 102.

Bemerkung: In Aufgabe 21 haben wir gesehen, dass ein Hausdorff'scher Vektorraum mit einer Familie von Halbnormen genau dann metrisierbar ist, wenn eine abzählbare Familie von Halbnormen bereits die Topologie erzeugt. Die schwache Topologie ist die lokalkonvexe Topologie, die der Familie von Halbnormen $|\cdot|_f$, $f \in X'$ mit $|x|_f = |f(x)|$ zugeordnet ist. Diese Aufgabe zeigt also, dass selbst wenn X' separabel ist, es *nicht* ausreicht, eine abzählbare Familie von Halbnormen zu wählen – während dies auf norm-beschränkten Mengen durchaus die richtige Topologie induziert, die so auch metrisiert werden kann.
Ein analoges Vorgehen zeigt, dass die schwach* Topologie nicht metrisierbar ist.

[1] d.h. für $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{n} c_i b_i = 0$, $c_i \in \mathbb{K}$, $b_i \in \mathcal{B}$ folgt, dass $c_i = 0\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$