Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Patrick Dondl
Stephan Wojtowytsch

SoSe 2016

Funktionalanalysis

Zusatzblatt zur Klausurvorbereitung

Eine der folgenden vier Aufgaben wird in der Klausur verwendet werden.

Aufgabe 1. *Nicht-reflexive L^p-Räume*
Es sei μ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass $L^1(\mu)$ kein reflexiver Banachraum ist, indem Sie eine Folge $f_n \in B_1(0) \subset L^1(\mu)$ finden, die keine schwach konvergente Teilfolge besitzt. Erklären Sie, warum dies ausreicht.

(b) Zeigen Sie, dass $L^1(\mu)$ kein reflexiver Banachraum ist, indem Sie ein Funktional $\delta \in (L^\infty)' \setminus J(L^1)$ konstruieren. Hinweis: Zeigen Sie, dass

$$\delta : C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \qquad \delta(f) = f(0)$$

nicht in der Form $\delta(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\, g \,\mathrm{d}x$ für $g \in L^1(\mu)$ geschrieben werden kann und benutzen Sie den Satz von Hahn-Banach.

(c) Folgern Sie, dass $L^\infty(\mu)$ kein reflexiver Banachraum ist.

Aufgabe 2. *L^p-Räume und Konvexität im Zielraum*
Es sei $A \subset \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$ und

$$L^p((0,1), A) := \{f \in L^p(0,1) \mid f(x) \in A \text{ für fast alle } x \in (0,1)\}.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(1) $L^p((0,1), A)$ ist schwach abgeschlossen in $L^p(0,1)$.

(2) A ist ein abgeschlossenes Intervall.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass für $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ mit $f(x+1) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f_n \rightharpoonup \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

in $L^p(0,1)$ für alle $1 < p < \infty$, wobei $f_n(x) := f(nx)$ ist.

Aufgabe 3. *Schwach im Hilbertraum*
Es sei $(H, (\cdot,\cdot))$ ein separabler Hilbertraum mit einer Orthonormalbasis $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Wir bezeichnen

$$||x|| = (x,x)^{1/2} \qquad \text{und} \qquad |x| := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\,|(x, e_n)|.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es gilt, dass $|x| < \infty$ für alle $x \in H$ ist.

(b) Es gilt, dass $|\cdot|$ eine Norm auf H ist.

(c) Es gilt $x_k \rightharpoonup x$ genau dann, wenn $\limsup_{k\to\infty} ||x_k|| < \infty$ und $|x_k - x| \to 0$.

(d) Es existiert eine Folge x_k sodass $||x_k|| \to \infty$ und $|x_k| \to 0$.

Aufgabe 4. *Montoner linearer Operator*
Es sei X ein Banachraum und $T : X \to X'$ ein linearer Operator, sodass

$$(Tx)(x) \geq 0$$

gilt für alle $x \in X$. Zeigen Sie, dass T stetig ist. Hinweis: Satz vom abgeschlossenen Graphen.

Weitere Klausuraufgaben könnten so aussehen:

Aufgabe 5. *Starke und schwache Konvergenz in Hilberträumen*
Es sei H ein Hilbertraum, $x_k, x \in H$ sodass $x_k \rightharpoonup x$ schwach und $||x_k|| \to ||x||$. Zeigen Sie, dass $x_n \to x$ stark.

Aufgabe 6. *Die Exponentialabbildung*
X ist ein Banachraum. Zeigen Sie, dass

$$\exp : \mathcal{L}(X,X) \to \mathcal{L}(X,X), \qquad \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

wohldefiniert und stetig ist. Hierbei ist $A^k = A \circ \cdots \circ A$ k-mal, $A^0 = \mathrm{Id}$.