Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl

Sommersemester 2016

Numerik für Differentialgleichungen

Blatt 1

Abgabe: 27. April 2016 im entsprechenden Kasten vor dem CIP-Pool, 2. OG, HH 10.

Grundlagen

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t)g(y). \tag{1}$$

Weiters seien $G(y)$ und $F(t)$ jeweils die Stammfunktionen von $\frac{1}{g(y)}$ und $f(t)$, wobei wir annehmen, dass alle involvierten Funktionen stetig sind.

(a) Zeigen Sie, dass für $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $y(t) = G^{-1}(F(t) + c)$, sofern sämtliche involvierten Funktionen existieren und hinreichend glatt sind, unsere Differentialgleichung (1) löst.

(b) Wie können Sie eine Anfangsbedingung berücksichtigen?

(c) Konstruieren Sie eine Lösung des Anfangswertproblems $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y \frac{1}{(1+t^2)}$ mit $\lambda > 0$ und $y(0) = 1$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Wir betrachten ein Fadenpendel der Länge $l > 0$ an dessen Ende ein Gewicht der Masse $m > 0$ angebracht sei.

(a) Zeigen Sie, dass sich der Auslenkungswinkel $\phi(t) \colon [0, T] \to \mathbb{R}$ unter Vernachlässigung von Reibungseffekten durch die Differenzialgleichung $\phi'' = -\frac{g}{l}\sin(\phi)$ mit der Erdbeschleunigung g beschreiben lässt.

(b) Skizzieren Sie das Phasendiagramm für die obige Gleichung des ungedämpften Fadenpendels, indem Sie die Differenzialgleichung zunächst als System erster Ordnung schreiben. Zeichnen Sie verschiedene Lösungskurven in das Diagramm ein und interpretieren Sie diese physikalisch. (c) Vereinfachen Sie die Differenzialgleichung für den Fall kleiner Winkel und geben Sie die Lösung der resultierenden Gleichung an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Skizzieren Sie das Phasendiagramm des Räuber-Beute-Modells

$$y_1' = \alpha y_1(1 - y_2), \quad y_2' = \beta y_2(y_1 - 1)$$

im Bereich $[0, 5]^2$ für die Parameter $\alpha = 1$ und $\beta = 1$. Begründen Sie damit das Auftreten periodischer Lösungen sowie die Positivität von Lösungen für geeignete Anfangsdaten.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie nichttriviale Lösungen der Differenzialgleichungen $y' = ty$, $y' = \sin(t)y$ und $y' = \cos(t)\mathrm{e}^y$.