Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl

Sommersemester 2016

Numerik für Differentialgleichungen

Blatt 3

Abgabe: 01. Juni 2016 im entsprechenden Kasten vor dem CIP-Pool, 2. OG, HH 10.

Einschrittverfahren

Aufgabe 9 (4 Punkte)**.** Seien $(y_\ell)_{\ell=0,\dots,L}$ eine nicht-negative Zahlenfolge und $\beta \geq 0$ so, dass für $\ell = 0, 1, ..., L$

$$y_\ell \leq \alpha + \sum_{k=0}^{\ell-1} \beta y_k$$

gilt. Zeigen Sie, dass $y_\ell \leq \alpha(1+\beta)^\ell \leq \alpha \exp\big(L\beta\big)$ für $\ell = 0, 1, ..., L$ gilt.

Aufgabe 10 (4 Punkte)**.** Für eine Inkrementfunktion Φ und $z_k \in \mathbb{R}$ seien $z : [t_k, t_{k+1}] \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems $z'(t) = f(t, z(t))$, $z(t_k) = z_k$, und $z_{k+1} = z_k + \tau\Phi(t_k, z_k, z_{k+1}, \tau)$. Damit seien die Konsistenzgrößen $\mathcal{C}$ und $\widetilde{\mathcal{C}}$ definiert durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(t_k, z_k, \tau) &= \frac{z(t_{k+1}) - z_k}{\tau} - \Phi\big(t_k, z_k, z_{k+1}, \tau\big), \\
\widetilde{\mathcal{C}}(t_k, z_k, \tau) &= \frac{z(t_{k+1}) - z_k}{\tau} - \Phi\big(t_k, z_k, z(t_{k+1}), \tau\big).
\end{aligned}$$

Die Inkrementfunktion Φ sei uniform Lipschitz-stetig im dritten Argument mit Lipschitz-Konstante L. Zeigen Sie, dass für $\tau < 1/(2L)$ folgende Äquivalenz gilt:

$$c^{-1}\big|\widetilde{\mathcal{C}}(t_k, z_k, \tau)\big| \leq \big|\mathcal{C}(t_k, z_k, \tau)\big| \leq c\big|\widetilde{\mathcal{C}}(t_k, z_k, \tau)\big|.$$

Geben Sie dabei die nur von L abhängige Konstante c explizit an.

Aufgabe 11 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, für die das durch die Inkrementfunktion

$$\Phi(t_k, y_k, \tau) = af(t_k, y_k) + bf\big(t_k + c\tau, y_k + \tau d f(t_k, y_k)\big)$$

definierte explizite Einschrittverfahren die Konsistenzordnung $p = 2$ besitzt.
Hinweis: Begründen und verwenden Sie die Approximation $f(t + c\tau, y + d\tau f(t, y)) = f(t, y) + \mathrm{p}_t\, f(t, y)c\tau + \mathrm{p}_y\, f(t, y)d\tau f(t, y) + \mathcal{O}(\tau^2)$ und differenzieren Sie die Differentialgleichung.

Aufgabe 12 (4 Punkte)**.** (i) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$u''(t) - u'(t) - 2u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

indem Sie (1) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung schreiben. Bestimmen Sie anschließend eine Lösung von (1) mit $u(0) = 1$ und $u'(0) = 5$. Ist diese eindeutig bestimmt?
(ii) Es sei die lineare homogene Differentialgleichung

$$u''(t) + au'(t) + bu(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

gegeben.

(1) Angenommen, das Polynom $\lambda^2 + a\lambda + b$ besitzt zwei unterschiedliche, reelle Nullstellen, die wir mit λ_1 und λ_2 bezeichnen. Zeigen Sie, dass für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$l_{\alpha,\beta}(t) = \alpha \exp(\lambda_1 t) + \beta \exp(\lambda_2 t)$$

eine Lösung der Differentialgleichung gegeben ist.

(2) Zeigen Sie dass, falls das obige Polynom nur eine (doppelte) reelle Nullstelle λ_1 besitzt, jede Funktion der Form

$$l_{\alpha,\beta}(t) = \alpha \exp(\lambda_1 t) + \beta t \exp(\lambda_1 t)$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ eine Lösung von (2) ist.

(3) Die Gleichung des Pendels, $u'' = -u$, passt leider nicht in dieses Schema. Können Sie trotzdem eine Lösung wie in a) finden? Denken Sie an die komplexen Zahlen.

(iii) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie analog zu (i) alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\lambda_n u^{(n)}(t) + \lambda_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \ldots \lambda_1 u'(t) + \lambda_0 u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Welcher Zusammenhang besteht zu den (komplexen) Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms, der Martix, die man erhält, wenn man (3) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung schreibt?