

Numerik für Differentialgleichungen

Blatt 4

Abgabe: 15. Juni 2016 im entsprechenden Kasten vor dem CIP-Pool, 2. OG, HH 10.

Runge-Kutta

Aufgabe 13 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass das Euler-Collatz-Verfahren, das implizite Euler-Verfahren sowie das Trapezverfahren jeweils den Runge-Kutta-Verfahren entsprechen, die durch die folgenden Butcher-Tableaus geben sind:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cc} 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}.$$

Aufgabe 14 (4 Punkte). (i) Leiten Sie hinreichende Bedingungen für die Konsistenz dritter Ordnung eines Runge-Kutta-Verfahrens für den Fall autonomer Differentialgleichungen her.

(ii) Konstruieren Sie auf Basis der Simpson-Regel ein Runge-Kutta-Verfahren der Konsistenzordnung $p = 4$.

Aufgabe 15 (4 Punkte). Für eine Schrittweite $\tau > 0$ und Zeitschritte $t_k = k\tau$, $k \in \mathbb{N}_0$, seien Werte $w_k \in \mathbb{R}$ gegeben.

(i) Konstruieren Sie das durch die drei Stützstellen $(t_{k+\ell}, w_{k+\ell})_{\ell=0,1,2}$ definierte Lagrange-Interpolationspolynom $p_2 \in \mathcal{P}_2$ und integrieren Sie dieses über das Intervall $[t_{k+2}, t_{k+3}]$, um Koeffizienten $(\beta_\ell)_{\ell=0,1,2}$ zu erhalten, so dass

$$\int_{t_{k+2}}^{t_{k+3}} p_2(t) dt = \tau \sum_{\ell=0}^2 \beta_\ell w_{k+\ell}.$$

(ii) Konstruieren Sie das durch die drei Stützstellen $(t_{k+\ell}, w_{k+\ell})_{\ell=0,1,2}$ definierte Lagrange-Interpolationspolynom $p_2 \in \mathcal{P}_2$ und integrieren Sie dieses über das Intervall $[t_{k+1}, t_{k+2}]$, um Koeffizienten $(\beta_\ell)_{\ell=0,1,2}$ zu erhalten, so dass

$$\int_{t_{k+1}}^{t_{k+2}} p_2(t) dt = \tau \sum_{\ell=0}^2 \beta_\ell w_{k+\ell}.$$

Aufgabe 16 (4 Punkte). Zeigen Sie durch Konstruktion expliziter Lösungen, dass die Bedingungen $\sum_{\ell=1}^m \gamma_\ell = 1$, $\sum_{\ell=1}^m \gamma_\ell \alpha_\ell = 1/2$ und $\sum_{\ell=1}^m \sum_{j=1}^m \gamma_\ell \beta_{\ell j} = 1/2$ notwendig für die Konsistenzordnung $p = 2$ eines Runge-Kutta-Verfahrens sind.