

Numerik für Differentialgleichungen

Blatt 5

Abgabe: 29. Juni 2016 im entsprechenden Kasten vor dem CIP-Pool, 2. OG, HH 10.

Mehrschrittverfahren

Aufgabe 17 (4 Punkte). Bestimmen Sie die maximale Zahl $p \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{\ell=0}^m \alpha_{\ell} = 0, \quad \sum_{\ell=0}^m (\alpha_{\ell} \ell^q - \beta_{\ell} q \ell^{q-1}) = 0, \quad q = 1, 2, \dots, p,$$

für das Adams–Bashforth- und das Adams–Moulton-Verfahren mit $m = 3$ beziehungsweise $m = 2$.

Aufgabe 18 (4 Punkte). Untersuchen Sie, für welche Werte $z = \tau\lambda \in \mathbb{R}$ man mit den durch

α_2	α_1	α_0	β_2	β_1	β_0
1	-1	0	0	3/2	-1/2
1	-1	0	5/12	8/12	-1/12
1	-4/3	1/3	2/3	0	0

definierten Zweischnittverfahren beschränkte Approximationen des Anfangswertproblems

$$y' = \lambda y \quad \text{in } (0, \infty), \\ y(0) = 0$$

erhält. Schreiben Sie dazu das Verfahren in der Form

$$Y_{k+1} = BY_k$$

und untersuchen Sie die Matrix $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Aufgabe 19 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass es für jedes $m \geq 1$ genau ein lineares m -Mehrschrittverfahren der Konsistenzordnung $2m$ und keins der Konsistenzordnung $2m+1$ gibt. Verwenden Sie dazu, dass α_0 und β_0 eliminiert werden können, und formulieren Sie das allgemeine Konsistenzkriterium als lineares Gleichungssystem $A[\hat{\alpha}, \beta]^T = b$ mit $\hat{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}]$. Verwenden Sie den Hauptsatz der Algebra zur Untersuchung der Matrix A^T .