

Numerik für Differentialgleichungen

Blatt 6

Abgabe: 13. Juli 2016 im entsprechenden Kasten vor dem CIP-Pool, 2. OG, HH 10.

Schöne Ferien

Aufgabe 20 (4 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ die diagonalisierbare Begleitmatrix der durch $(\alpha_\ell)_{\ell=0, \dots, m}$ definierten Differenzgleichung. Zeigen Sie, dass die Folge $(y_k)_{k \geq 0}$ genau dann eine Lösung der homogenen Differenzgleichung ist, wenn für die Vektoren $Y_k = [y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m-1}]^T$ gilt $Y_k = \sum_{j=1}^m \lambda_j^k \gamma_j v_j$, $k \geq 0$ mit geeigneten Zahlen $\gamma_j \in \mathbb{R}$, Eigenvektoren v_j und den Nullstellen λ_j des Polynoms $q(\lambda) = \lambda^m + \alpha_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + \lambda \alpha_1 + \alpha_0$.

Aufgabe 21 (4 Punkte). Untersuchen Sie die Nullstabilität und Konsistenz des Mehrschrittverfahrens $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 3y_k = -2\tau f(t_k, y_k)$.

Aufgabe 22 (4 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Zeichnen Sie die Phasendiagramme der Differentialgleichung $z' = Az$ in einer Umgebung des Ursprungs für verschiedene typische Situationen mit (i) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, (ii) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{<0}$, (iii) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, (iv) $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$.

Aufgabe 23 (4 Punkte). Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch ist. Sie sollten Ihre Antwort begründen können.

Die Stabilitätsfunktion jedes expliziten Runge–Kutta-Verfahrens ist unbeschränkt.	
Die Rekursionsformel $y_{k+2} = y_{k+1} - (1/4)y_k$ ist nullstabil.	
Notwendig für die Konsistenz $p \geq 1$ eines Mehrschrittverfahrens ist die Bedingung $\sum_{\ell=0}^m \beta_\ell = 1$.	
Die Bedingung $\sum_{\ell=1}^m \gamma_\ell = 1$ ist notwendig für die Konsistenz positiver Ordnung eines Runge–Kutta-Verfahrens.	
Der lokale Diskretisierungsfehler des expliziten Euler-Verfahrens für die Differentialgleichung $y' = \alpha y$ ist gegeben durch $(z(t_{k+1}) - z_k)/\tau - \alpha z_k$.	
Gilt $f \in C^1(\mathbb{R})$, so besitzt das Anfangswertproblem $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$, für alle $y_0 \in \mathbb{R}$ und $T > 0$ eine Lösung $y \in C^1([0, T])$.	
Die Identität $y' = y(y(t))$ definiert eine gewöhnliche Differentialgleichung.	