Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl Sommersemester 2016

**Numerik für Differentialgleichungen**

Blatt zur Klausurvorbereitung

*Von den folgenden vier Aufgaben wird eine in der Klausur gestellt*

**Aufgabe 1.**

Sei $f\colon [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine global Lipschitz-stetige Funktion. Betrachten Sie das zu dem Anfangswertproblem $y' = f(t,y)$, $y(0) = y_0$ gehörende implizite Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + \tau f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

für eine Zeitschrittweite $\tau > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeigen Sie, dass das implizite Euler-Verfahren konsistent von der Ordnung $p = 1$ ist, das heißt, dass

$$|\tilde{\mathcal{C}}(t_k, y(t_k), \tau)| = \left| \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{\tau} - \Phi(t_k, y(t_k), y(t_{k+1}), \tau) \right| \le c\tau$$

mit einer geeigneten Konstanten $c \ge 0$ gilt. Dabei bezeichnen $\Phi$ die zum Verfahren gehörende Inkrementfunktion und $y$ die exakte Lösung des Anfangswertproblems.

(b) Beweisen Sie die Konvergenz des Verfahrens gegen die exakte Lösung $y$ auf $0 \le t \le T$ für $T \in \mathbb{R}$ mit $\tau \to 0$.

**Aufgabe 2.**

(a) Bestimmen Sie ein zweistufiges Runge–Kutta-Verfahren der Konsistenzordnung $p = 4$, das auf der Gaußschen Quadraturformel mit den Quadraturpunkten $x_0, x_1 = 1/2 \pm 1/(2\sqrt{3})$ und zugehörigen Gewichten $w_0 = w_1 = 1/2$ basiert.

(b) Welche Quadraturformeln liegen dem klassischen Runge–Kutta-Verfahren, der 3/8-Regel und dem Radau-3-Verfahren (siehe Butcher-Tableaus unten) zugrunde? Bestimmen Sie den Exaktheitsgrad $n$ dieser Quadraturformeln, d.h. bestimmen Sie $n \in \mathbb{N}_0$ jeweils so, dass für die jeweilige Quadraturformel $Q$,

$$Q(p) = \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$$

für alle Polynome $p$ vom Grad $n$ gilt und ein Polynom $\tilde{p}$ vom Grad $n+1$ existiert, so dass

$$Q(\tilde{p}) \neq \int_a^b \tilde{p}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Butcher-Tableaus:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

Klassisches Runge–Kutta-Verfahren,

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/3 & 1/3 & & & \\ 2/3 & -1/3 & 1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$$

3/8-Regel,

$$\begin{array}{c|cc} 1/3 & 5/12 & -1/12 \\ 1 & 3/4 & 1/4 \\ \hline & 3/4 & 1/4 \end{array}$$

Radau-3.

**Aufgabe 3.**

Betrachten Sie für das Anfangswertproblem $y' = f(t,y)$, $y(0) = y_0$ das numerische Verfahren

$$y_{k+3} + by_{k+1} + ay_k = \tau f(t_{k+2}, y_{k+2})$$

mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$, $t_k = k\tau$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und einer gegeben Zeitschrittweite $\tau > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass eine eindeutige Wahl von $a$ und $b$ existiert, so dass das Verfahren konsistent ist.

Im Folgenden seien $a$ und $b$ stets so wie in $(a)$.

(b) Zeigen Sie, dass das Verfahren die Konsistenzordnung 1 besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass das Verfahren nicht nullstabil ist. Folgern Sie, dass die numerische Lösung im Allgemeinen nicht gegen eine Lösung das Anfangswertproblems konvergiert.

(d) Beschreiben Sie qualitativ instabile Lösungen für kleine $\tau$.

**Aufgabe 4.**

Betrachten Sie für eine gegebene Schrittweite $\tau > 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ das zweistufige Runge–Kutta-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + \tau\gamma_1\eta_1^k + \tau\gamma_2\eta_2^k$$

für die Differentialgleichung $y' = \lambda y$.

(a) Sei $\Delta = \det(I - \lambda\tau B)$, wobei

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\eta_1^k = \frac{(1 + \lambda\tau(\beta_{12} - \beta_{22}))\lambda y_k}{\Delta} \text{ und } \eta_2^k = \frac{(1 + \lambda\tau(\beta_{21} - \beta_{11}))\lambda y_k}{\Delta}.$$

(b) Sei durch das Butcher-Tableau

$$\begin{array}{r|rr} \frac{1}{6}(3-\sqrt{3}) & \frac{1}{4} & \frac{1}{12}(3-2\sqrt{3}) \\ \frac{1}{6}(3+\sqrt{3}) & \frac{1}{12}(3+2\sqrt{3}) & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

ein Runge–Kutta-Verfahren gegeben. Folgern Sie, dass $y_{k+1} = g(\lambda\tau)y_k$ mit

$$g(\lambda\tau) = \frac{1 + \frac{1}{2}\lambda\tau + \frac{1}{12}\lambda^2\tau^2}{1 - \frac{1}{2}\lambda\tau + \frac{1}{12}\lambda^2\tau^2}$$

gilt.

(c) Schreiben Sie $g$ in der faktorisierten Form

$$g(z) = \frac{(z+p)(z+q)}{(z-p)(z-q)}$$

und folgern Sie, dass das gegebene Verfahren $A$-stabil ist.

*Die beiden folgenden Aufgaben sind Beispiele für normale Klausuraufgaben*

**Aufgabe 5.**

Zeigen Sie mit Hilfe einer geeigneten Taylorentwicklung, dass das durch die Trapezregel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}\,[f(b)-f(a)]$$

gegebene Runge–Kutta-Verfahren Konsistenzordnung 2 besitzt, d.h., für eine Konstante $c \geq 0$ gilt

$$|\tilde{\mathcal{C}}(t_k, y(t_k), \tau)| = \left| \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{\tau} - \Phi(t_k, y(t_k), y(t_{k+1}), \tau) \right| \leq c\tau^2,$$

dabei bezeichnetn $\Phi$ die zum Verfahren gehörende Inkrementfunktion und $y$ eine die exakte Lösung des Anfangswertproblems.

**Aufgabe 6.**

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch ist.

| | |
|---|---|
| Gilt $f \in C^1(\mathbb{R})$, so besitzt das Anfangswertproblem $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$, für alle $y_0 \in \mathbb{R}$ und $T > 0$ eine Lösung $y \in C^1([0,T])$. | |
| Die Inkrementfunktion $\Phi(t,a,b,\tau) = \alpha(a+b)/2$ definiert ein Einschrittverfahren für die Differentialgleichung $y' = \alpha y$. | |
| Das implizite Euler-Verfahren ist kein Runge–Kutta-Verfahren. | |
| Das explizite Euler-Verfahren ist ein Mehrschrittverfahren mit zwei Schritten. | |
| Jedes Einschrittverfahren erfüllt die Dahlquistsche Wurzelbedingung. | |
| Die Rekursionsformel $y_{k+2} = y_{k+1} - (1/4)y_k$ ist nullstabil. | |