# Seminarvorträge:

29. April 2016

**Vor-Vorträge:** Unbeschränkte und selbstadjungierte Operatoren.

- Definition unbeschränkter abgeschlossener Operatoren;
- Definition von Resolventenmenge und Spektrum;
- Definition von adjungiertem Operator (inkl. Definitionsbereich) und selbstadjungierten Operatoren;
- Wesentlich selbstadjungierte Operatoren;
- Fundamentales Kriterium für Selbstadjungiertheit (z.B. [Dav80, Lemma 4.1] oder [Wer08, Satz VII.2.8]);
- Definition relativ beschränkter Störungen und Stabilität von selbstadjungiertheit unter relativ beschränkten, symmetrischen Störungen ([RS75, Th. X.12] oder [Kat95, Th. V.4.3]);
- Eventuell Riemann-Integral für Banachraumwertige Funktionen erwähnen.

**Vortrag 1:** Halbgruppen und Erzeuger.

- Definition von Halbgruppe, Erzeuger;
- Zusammenhang zwischen Resolvente und Halbgruppe:
  - Lemma VII.4.5 in [Wer08];
  - Satz VII.4.6 in [Wer08];
  - Idealerweise noch Satz VII.4.7 (für Vortrag 6);

**Vortrag 2[1]:** Beispiele.

- Exponentialreihe $e^{-tA} = \sum_k \frac{A^k}{k!}$ für beschränkte Operatoren;
- Beispiel: $-\Delta$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ nach [Wer08, Ch. VII.4] mittels Fouriertransformation (benötigt ein paar Resultate über Schwartzraum und Faltung);

- Beispiel: $-\Delta+\omega^2 x^2$ auf $L^2(\mathbb{R})$ nach [Dav80, Lemma 7.12] mittels Erzeuger und Vernichter;

**Vortrag $3^{1,2}$:** Sätze von Hille-Yosida und Lumer-Phillips.

- Beweise von Satz VII.4.10 und Satz VII.4.11 in [Wer08] (Hille-Yosida für Kontraktionshalbgruppen);
- Allgemeine Version von Hille-Yosida erwähnen;
- Beweis von Satz von Lumer-Phillips (Satz VII.4.16 in [Wer08]).
- Falls noch Zeit ist: Anwendungen; z.B. $-\Delta$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

**Vortrag $4^{1,2,3}$:** Beschränkte Störungen von Erzeugern.

- Beweis von *Bounded Perturbation Theorem*: [EN00, Th. III.1.3] (Benutzt Hille-Yosida);
- Milde Lösungsformel: Corollary III.1.7 in [EN00];
- Abstract Volterra Operators: Beweis von Theorem 1.10 in [EN00];
- *Falls Trotter-Formel genommen wird*: Beweis von Theorem 3.17 in [Dav80].

**Vortrag $5^{1,2,3}$:** Unitäre Gruppen und Schrödingeroperatoren.

- Selbstadjungierte Operatoren erzeugen unitäre Gruppen: Proposition 1.14 und Theorem 4.3 in [Dav80].
- Schrödingeroperatoren: Ch. V.5.3 in [Kat95] zeigt, dass
$$H := -\Delta + q_0 + q_1 \quad \text{auf} \quad L^2(\mathbb{R}^3),$$
mit $q_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $q_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ selbstadjungiert ist;
- Ein Spezialfall hiervon ist $H = -\Delta + e|x|^{-1}$; der Hamiltonian für's Wasserstoffatom

**Vortrag $6^{1,2,3}$:** Wellengleichung und Halbgruppen.

- Beweis von Theorem 10.7 in [Bre10] (benutzt Hille-Yosida).
- Falls die Leute genug Regularitätstheorie kennen, auch Theorem 10.8 in [Bre10].

**Vortrag $7^{1,2,4}$:** Trotter-Formel.

- Beweis von Lemma 3.28 und Theorem 3.30 in [Dav80];
- Eventuell Anwendungen.

Die Exponenten geben an, welche Vorträge als Voraussetzung benötigt werden.

## Literatur

[Wer08] D. Werner. *Funktionalanalysis (Springer-Lehrbuch) (German Edition)*. Springer, 6th edition, 2008.

[RS81] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*. Academic Press, Inc., 1981.

[Kat95] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators (Classics in Mathematics)*. Springer, reprint of the corr. 2nd edition, 1995.

[Bre10] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations (Universitext)*. Springer, 2011 edition, 2010.

[EN00] K. Engel and R. Nagel. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2000.

[Dav80] E. B. Davies. *One-Parameter Semigroups (L.M.S. Monographs)*. Academic Pr, 1980.

[TL80] A. Taylor and D. Lay. *Introduction to Functional Analysis*. Wiley, 1980.

[GGK90] I. Gohberg, S. Goldberg, and M. A. Kaashoek. *Classes of Linear Operators Vol. 1*. Operator Theory. Birkhäuser Verlag, 1990.

[RS75] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis*. Academic Press, Inc., 1975.

[AE08] H. Amann and J. Escher. *Analysis III*. Grundstudium Mathematik, Birkhäuser, 2008

[RS78] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators*. Academic Press, Inc., 1978.