Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Keith Anguige

Sommersemester 2017

Numerik 2

Blatt 1

Konditionierung, Gleitkommaarithmetik

Aufgabe 1 (Präsenzaufgabe).
Sei die Aufgabe $\phi(\cdot)$ differenzierbar an der Stelle x. Zeigen Sie, dass

$$\kappa_\phi(x) = \frac{\|D\phi(x)\|\|x\|}{\|\phi(x)\|}.$$

Aufgabe 2 (Präsenzaufgabe).

(1) Sei $\phi(b) = A^{-1}b$. Zeigen Sie, dass

$$\kappa_\phi(b) \leq \mathrm{cond}(A).$$

Ferner, dass ein $b \in \mathbb{R}^n$ existiert, sodass Gleichheit gilt.

(2) Sei $\phi(A) = A^{-1}b$. Zeigen Sie, dass

$$\kappa_\phi(A) \leq \mathrm{cond}(A).$$

Aufgabe 3 (Präsenzaufgabe).
Zeigen Sie, dass sich jede Gleitkommazahl $g \in G$ als b-adische Summe darstellen lässt, das heisst es gilt

$$g = \pm b^e(d_1 b^{-1} + d_2 b^{-2} + \ldots + d_p b^{-p}),$$

mit Ziffern $d_1, d_2, \ldots, d_p \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ und $e_{\min} \leq e \leq e_{\max}$.
Ferner, dass für normalisierte Gleitkommazahlen diese Darstellung eindeutig definiert (mit $d_1 \neq 0$) ist.

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe).
Zeigen Sie, dass sich jede Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bezüglich einer Basis $b \geq 2$ in der Form

$$x = \pm b^e \sum_{k=1}^{\infty} d_k b^{-k},$$

mit $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ und $e \in \mathbb{Z}$ darstellen lässt, wobei $d_1 \neq 0$ gewählt werden kann.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.**

(1) Berechnen Sie die Anzahl der Gleitkommazahlen sowie die positiven Extrema $g_{\min}$ und $g_{\max}$ für die IEEE-Formate *single* und *double precision.*
(2) Bestimmen Sie $\mathrm{rd}(\pi)$ für $b = 2$, $p = 5$ und $b = 10$, $p = 4$.
(3) Wie lässt sich das Auftreten von *Overflow* bei der Berechnung von $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ vermeiden, wenn $\max\{|a|, |b|\} > g_{\max}^{\frac{1}{2}}$ und $|a|, |b| \leq g_{\max}/2$ gilt?

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.**

(1) Beweisen Sie, dass die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ in Gleitkommaarithmetik konvergiert.
(2) Zeigen Sie, dass die Gleitkommaaddition '$+_G$' *nicht* assoziativ ist.

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.**

Verwenden Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren ohne beziehungsweise mit Pivotsuche zur Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 0.1 \cdot 10^{-3} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Verwenden Sie dabei Dezimalzahlen mit Präzision $p = 3, 4, 5$, das heisst arbeiten Sie unter Verwendung geeigneter Rundung mit Zahlen der Form $\pm 0.d_1 d_2 \dots d_p \cdot 10^e$ mit $e \in \mathbb{Z}$ und $d_1, d_2, \dots, d_p \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.**

Berechnen Sie $f(0.00001)$ mit einer Genauigkeit von 12 Dezimalstellen, wobei

$$f(x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x^2}}{x \sin x}.$$

Hinweis: Taylor.

Bemerkung: Warum funktioniert die naive Berechnung der Funktion nicht gut?