Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Keith Anguige

Sommersemester 2017

Numerik 2

Blatt 2

Abgabe: 24. Mai 2017

Polynominterpolation

Aufgabe 9 (Präsenzaufgabe)**.**

(1) Sei $f \in C^2([a,b])$ mit der Eigenschaft $f(a) = f(b)$ und $f'(a) = f'(b) = 0$. Geben Sie eine optimale untere Schranke für die Anzahl der Nullstellen von f'' an.

(2) Für Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$, sei $w(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ das Stützstellenpolynom und $L_i, i = 0, 1, \ldots, n$, das i-te Lagrange-Basispolynom. Zeigen Sie, dass gilt

$$L_i(x) = \frac{w(x)}{(x - x_i)w'(x_i)}.$$

Aufgabe 10 (4 Punkte)**.**

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der für $t \in [-1, 1]$ durch $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ definierten Tschebyscheff-Polynome:

(1) Es gilt $\max_{t\in[-1,1]} |T_n(t)| = 1$

(2) Mit $T_0(t) = 1$ und $T_1(t) = t$ gilt

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)$$

für alle $t \in [-1, 1]$. Insbesondere gilt $T_n \in \mathcal{P}_n|_{[-1,1]}$.

(3) Für $n \geq 1$ folgt $T_n(t) = 2^{n-1}t^n + q_{n-1}(t)$ mit $q_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}|_{[-1,1]}$.

(4) Für $n \geq 1$ hat T_n die Nullstellen $t_j = \cos((j + 1/2)\pi/n)$, $j = 0, 1, \ldots, n - 1$, und die $n + 1$ Extremstellen $s_j = \cos(j\pi/n), j = 0, 1, \ldots, n$, mit $T_n(s_j) = \pm 1$.

Aufgabe 11 (4 Punkte)**.**

Für $n + 1$ Stützstellen und -werte $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ und $0 \leq j \leq n$ sowie $0 \leq i \leq n - j$ sei $p_{i,j} \in \mathcal{P}_j$ festgelegt durch $p_{i,j}(x_k) = y_k$, $k = i, i + 1, \ldots, i + j$. Die Zahlen $y_{i,j}$ seien definiert durch $y_{i,0} = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, und

$$y_{i,j} = \frac{y_{i+1,j-1} - y_{i,j-1}}{x_{i+j} - x_i}$$

für $1 \leq j \leq n$ und $0 \leq i \leq n - j$.

(1) Zeigen Sie, dass $p_{i,j}(x) = y_{i,j}x^j + r_{i,j}(x)$ mit einem Polynom $r_{i,j} \in \mathcal{P}_{j-1}$ für $j \geq 1$ und $i = 0, 1, \ldots, n - j$ gilt.

(2) Zeigen Sie, dass für $q_j(x) = p_{0,j}(x) - p_{0,j-1}(x)$, wobei $p_{0,-1} = 0$ sei, die Darstellung $q_j(x) = y_{0,j} \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i)$ gilt.

(3) Folgern Sie, dass $p_{0,n}(x) = \sum_{j=0}^{n} y_{0,j} \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i)$ gilt.

Aufgabe 12 (4 Punkte)**.**

Es seien $a \leq x_0 < x_1 \ldots < x_n \leq b$ gegebene Stützstellen und $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ Polynome vom maximalen Grad n.

(1) Zeigen Sie, dass die durch $V_{ij} = v_i(x_j)$, $i, j = 0, 1, \ldots, n$, definierte Matrix $V \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ genau dann regulär ist, wenn aus $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ folgt, dass $\alpha_i = 0$ für $i = 0, 1, \ldots, n$ gilt.

(2) Zeigen Sie, dass im Fall der Monome $v_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, \ldots, n$ gilt
$$\det V = \prod_{0\leq i<j\leq n} (x_j - x_i).$$

Aufgabe 13 (4 Punkte)**.**

Seien $x_0 < x_1 \ldots < x_n$ und $l \in \mathbb{N}$. Für $x \in \mathbb{R}$ und $0 \leq j \leq n$ definiere
$$H_{j,l}(x) = \frac{(x - x_j)^l}{l!} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right)^{l+1}.$$

Zeigen Sie, dass für die Ableitungen von $H_{j,l}$ die Identitäten $\frac{d^k}{dx^k} H_{j,l}(x_m) = \delta_{kl}\delta_{jm}$ für $0 \leq k \leq l$ und $0 \leq m \leq n$ gelten.