Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Keith Anguige

Sommersemester 2017

Numerik 2

Blatt 3

Abgabe: 14. Juni 2017

Splines

Aufgabe 14 (Präsenzaufgabe)**.**

Für die durch die Punkte $x_i = (i/n)^4$, $i = 0, 1, \ldots, n$ definierte Partitionierung von $[0, 1]$, sei $f_n \in \mathcal{S}^{1,0}(\mathcal{T}_n)$ die interpolierende Spline-Funktion von $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$. Zeigen Sie, dass

$$\max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq cn^{-2},$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten $c > 0$ gilt. Skizzieren Sie f_n für $n = 2, 4, 8$.

Aufgabe 15 (4 Punkte)**.**

(1) Seien $0 \leq a < b$ und $x \mapsto g(x)$ die lineare Funktion, die die Funktion $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ an den Stützstellen a und b interpoliert. Zeigen Sie, dass für den Fehler

$$e = \max_{x\in[a,b]} |g(x) - f(x)|$$

die Abschätzungen $e \leq (b - a)^2 a^{-3/2}/8$ im Fall $a > 0$ und $e \leq b^{1/2}/4$ im Fall $a = 0$ gelten.

(2) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x_i = i/n$, $i = 0, 1, \ldots, n$, sei $f_n \in \mathcal{S}^{1,0}(\mathcal{T}_n)$ die interpolierende Spline-Funktion von $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ im Intervall $[0, 1]$. Zeigen Sie, dass

$$\max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq n^{-\frac{1}{2}}/4$$

gilt.

(3) In welchen Bereichen ist die Fehlerabschätzung suboptimal?

Aufgabe 16 (4 Punkte)**.**

Es sei durch $\{x_j\}_{j=0}^n$ eine Partition des Intervalls $[a, b]$, sowie Werte $\{y_j\}_{j=0}^n$ gegeben. Angenommen $s : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ sei eine (bezüglich der Partition) stückweise Polynomiale Funktion vom Grad 3, also

$$s|_{[x_j,x_{j+1}]} = p_j, \quad j = 0, \ldots, n - 1$$

mit

$$p_j = a_j + b_j(x - x_j) + \frac{\gamma_j}{2}(x - x_j)^2 + \frac{d_j}{6}(x - x_j)^3.$$

Weiters seien die Bedingungen

(1) $a_j = y_j,\ j = 0, \ldots, n - 1$

(2) $b_j = (y_{j+1} - y_j)/h_j - \frac{1}{2}\gamma_j h_j - \frac{1}{6} d_j h_j^2,\ j = 0, \ldots, n - 1$

(3)

$$h_i \frac{\gamma_i}{6} + \frac{(h_{i+1} + h_i)}{2} \frac{4\gamma_{i+1}}{6} + h_{i+1} \frac{\gamma_{i+2}}{6} = \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i},$$

$j = 0, \ldots, n - 2$

(4) $d_j = (\gamma_{j+1} - \gamma_j)/h_j, \quad j = 0, \ldots, n - 1$

erfüllt.

a) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Funktion s dann zwei mal stetig differenzierbar ist, und dass gilt $s(x_j) = y_j,\ j = 0, \ldots, n$. Weisen Sie dies für $j = n$ explizit nach (für $j < n$ ist der Nachweis trivial).

b) Zeigen Sie, dass gilt $s''(x_j) = \gamma_j$.

Aufgabe 17 (4 Punkte)**.**

Bestimmen Sie explizit die interpolierenden kubischen Splines mit natürlichen sowie Hermite-Randbedingungen, $s'(-1) = 0, s'(1) = 3$, für die Stützstellen $x_i = -1 + i/2$ und Stützwerte $y_i = (-1)^i,\ i = 0, 1, 2, 3, 4$ und zeichnen Sie diese.

Aufgabe 18 (4 Punkte)**.**

Die Funktionen $B_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}$, seien durch die Rekursion

$$B_{m+1}(x) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} B_m(t)\ dt$$

mit der Initialisierung $B_0(x) = 1$ für $|x| \leq 1/2$ und $B_0(x) = 0$ für $|x| > 1/2$ definiert.

(1) Zeigen Sie, dass B_m nichtnegativ ist und $B_m(x) = 0$ für $|x| > (m+1)/2$ gilt.
(2) Zeigen Sie, dass mit der durch die Punkte $x_i = i-(m+1)/2,\ i = 0, \ldots, m+1$ definierten Partitionierung $\mathcal{T}_{m+1}$ des Intervalls $[-(m+1)/2, (m+1)/2]$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Spline-Funktion $B_m \in \mathcal{S}^{m,m-1}(\mathcal{T}_{m+1})$ definiert wird.
(3) Bestimmen Sie die Funktionen B_1, B_2 und B_3 explizit und skizzieren Sie diese.