Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Keith Anguige Sommersemester 2017

Numerik 2

Blatt 4

Abgabe: 28. Juni 2017

Diskrete Fourier-Transformation

Aufgabe 19 (Präsenzaufgabe)**.**

Seien $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1} \in \mathbb{C}$ und $n = 2m$. Konstruieren Sie Zahlen $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{C}$, sodass mit den Koeffizienten $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1} \in \mathbb{C}$ der Lösung der zugehörigen komplexen trigonometrischen Interpolationsaufgabe und der Funktion

$$q(x) = \sum_{k=-m}^{m-1} \beta_{k+m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

die Interpolationseigenschaft $q(x_j) = w_j$ für $j = 0, 1, \ldots, n-1$ und $x_j = 2\pi j/n$ erfüllt ist.

Aufgabe 20 (4 Punkte)**.** *Unitarität*

(1) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}lk2\pi/n} = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ Teiler von } l, \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

(2) Folgern Sie, dass die Fourier-Basis $(\omega^0, \omega^1, \ldots, \omega^{n-1})$ mit $\omega^k = (\omega_n^{0k}, \omega_n^{1k}, \ldots, \omega_n^{(n-1)k})^\top$, $k = 0, \ldots, (n-1)$ und der n-ten komplexen Einheitswurzel $\omega_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/n}$ die Eigenschaft

$$\omega^k \cdot \omega^l = n\delta_{kl}$$

besitzt.

Achtung: Im $\mathbb{C}^n$ gilt standardmässig $a \cdot b = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \bar{b}_i$. Also, den Querstrich nicht vergessen!

Aufgabe 21 (4 Punkte)**.** $T \neq p$.

Zu gegebenen $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{C}$ seien T und p die Lösungen der reellen beziehungsweise komplexen trigonometrischen Interpolationsaufgabe. Zeigen Sie, dass

$$T(x_j) = p(x_j) \quad \text{für } x_j = 2\pi j/n,\ j = 0, \ldots, n-1$$

erfüllt ist aber im Allgemeinen nicht $p = T$ gilt.

Aufgabe 22 (4 Punkte)**.** *Reelle trigonometrische Interpolation direkt.*

Zeigen Sie, dass die Lösung der reellen trigonometrischen Interpolationsaufgabe durch die Koeffizienten

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \cos(kx_j) \quad b_l = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} y_j \sin(lx_j)$$

für $k = 0, 1, \ldots, m$ und $l = 1, 2, \ldots, m-1$ mit $x_j = 2\pi j/n$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ und $n = 2m$ gegeben ist.

Aufgabe 23 (4 Punkte)**.** *Orthogonalität im Reellen.*

Folgern Sie aus Aufgabe 22, dass die Vektoren

$$f^k = (\cos(kx_j))_{j=0,\ldots,n-1}, \quad g^l = (\sin(lx_j))_{j=0,\ldots,n-1},$$

mit k und l wie oben eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^n$ definieren.