Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Keith Anguige

Sommersemester 2017

Numerik 2

Blatt 5

Abgabe: 12. Juli 2017

Quadratur

Aufgabe 24 (Präsenzaufgabe)**.**

Sei $Q : C^0([a, b]) \to \mathbb{R}$ eine Quadraturformel mit $n + 1$ Gewichten und Quadraturpunkten $(x_i, w_i)_{i=0,1,\ldots,n}$, die exakt vom Grad n ist.

(1) Zeigen Sie, dass

$$w_i = \int_a^b L_i(x)\ dx,$$

für $i = 0, 1, \ldots, n$ mit den durch die Stützstellen $(x_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ definierten Lagrange-Basispolynomen $(L_i)_{i=0,1,\ldots,n}$.

(2) Zeigen Sie, dass im Fall der Exaktheit vom Grad $2n$ gilt, dass $w_i > 0$ für $i = 0, 1, \ldots, n$.

Aufgabe 25 (4 Punkte)**.**

Bezeichne $Q_n(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$ eine Quadraturformel auf dem Intervall $[-1, 1]$. Berechnen Sie den Exaktheitsgrad der folgenden Formeln:

(1)

$$Q_2(f) = \frac{2}{3}\left(2f(-1/2) - f(0) + 2f(1/2)\right)$$

(2)

$$Q_3(f) = \frac{1}{4}\left(f(-1) + 3f(-1/3) + 3f(1/3) + f(1)\right)$$

Tipp: Die Linearität der Formeln und der Integration vereinfachen den Vorgang.

Aufgabe 26 (4Punkte)**.**

Die Quadraturformel $Q : C^0([a, b]) \to \mathbb{R}$ sei exakt vom Grad $2q$ und die zugehörigen Gewichte $(w_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ und Knoten $(x_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ seien symmetrisch bezüglich dem Intervallmittelpunkt $(a + b)/2$ angeordnet. Zeigen Sie, dass Q exakt vom Grad $2q + 1$ ist.

Aufgabe 27 (4 Punkte)**.**

Sei $\langle f, g\rangle_\omega = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)\ dx$ und beweisen Sie den folgenden Satz:

Es existieren Orthogonalpolynome $(\pi_j)_{j=0,1,\ldots,n}$ derart, dass $\pi_j \in \mathcal{P}_j$ und $\langle \pi_j, \pi_k\rangle_\omega = \delta_{jk}$ für alle $0 \le j, k \le n$ mit $j \ne k$ gilt. Insbesondere gilt $\langle \pi_j, p\rangle_\omega = 0$ für alle $p \in \mathcal{P}_{j-1}$ und die Polynome bilden eine Basis von $\mathcal{P}_n$.

Tipp: Gram-Schmidt.

Aufgabe 28 (4 Punkte)**.**

Verwenden Sie die Darstellung des Fehlers der Lagrange-Interpolation

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j),$$

$\xi(x) \in [a,b]$, um für die Trapez- beziehungsweise Simpson-Regel zu beweisen, dass

$$|I(f) - Q_{\text{Trap}}(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_{C^0([a,b])},$$

$$|I(f) - Q_{\text{Sim}}(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{192} \|f^{(4)}\|_{C^0([a,b])}.$$

Tipp: Bei Simpson verwenden Sie den Hauptsatz und eine schöne Eigenschaft des Polynoms $(x-a)(x-b)(x-\frac{a+b}{2})$.