

Numerik 2

Klausurvorbereitungsblatt,
keine Abgabe

Eine der folgenden vier Aufgaben wird so in der Klausur gestellt.

Aufgabe 1. Cholesky

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix und $b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(m)}$ verschiedene rechte Seiten. Es sei $A = LL^\top$ die Cholesky-Zerlegung von A mit der unteren Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Vergleichen Sie den Aufwand der folgenden beiden Vorgehensweisen zur Lösung der m linearen Gleichungssysteme $Ax^{(i)} = b^{(i)}, i = 1, 2, \dots, m$:

- (i) Durch Lösen der n linearen Gleichungssysteme $Az^{(j)} = e_j$ mit der Cholesky-Zerlegung von A für die kanonischen Basisvektoren $e_j \in \mathbb{R}^n$ werde die Inverse $A^{-1} = (z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(n)})$ bestimmt und anschließend $x^{(i)} = A^{-1}b^{(i)}$ mittels Matrix-Vektor-Multiplikation bestimmt.
- (ii) Mit der Cholesky-Zerlegung von A werden die Lösungen von $Ax^{(i)} = b^{(i)}$ für $i = 1, 2, \dots, m$ bestimmt.

Aufgabe 2. Iterativ

- (a) Zeigen Sie, dass ein iteratives Verfahren der form

$$x^{(k)} = \Phi(x^{(k-1)}) \quad k \in \mathbb{N}$$

mit gegebenem $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und $\Phi(x) = Mx + b$ konvergiert, wenn für den spektralen Radius

$$\rho(M) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ Eigenwert von } M\}$$

gilt $\rho(M) < 1$.

Hinweis: Sie dürfen (wie immer) geeignete Sätze aus der Vorlesung zitieren.

- (b) Wir wollen das block-lineare System

$$\begin{pmatrix} A_1 & B \\ B & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

mit $A_1, A_2, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $x, y, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$ lösen. Betrachten Sie die beiden iterativen Methoden

- (i) $A_1x^{(k+1)} + By^{(k)} = b_1, Bx^{(k)} + A_2y^{(k+1)} = b_2,$
- (ii) $A_1x^{(k+1)} + By^{(k)} = b_1, Bx^{(k+1)} + A_2y^{(k+1)} = b_2.$

Finden Sie hinreichende Bedingungen an die jeweiligen spektralen Radien der involvierten Matrizen für die Konvergenz der Methoden.

Aufgabe 3. Stützstellen

Konstruieren Sie Stützstellen $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ im Intervall $[a, b]$, sodass für die Lagrange-Interpolation p jeder Funktion $f \in C^{n+1}([a, b])$ gilt

$$\|f - p\|_{C^0([a,b])} \leq 2^{-n} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \frac{\|f^{(n+1)}\|_{C^0([a,b])}}{(n+1)!}.$$

Aufgabe 4. Steepest descent

Wir betrachten ein quadratisches Funktional der Form $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit, und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass bei einem Gradientenabstiegsverfahren zu dieser Energie, also

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \alpha^{(k-1)} d^{(k-1)} \quad k \in \mathbb{N}$$

mit $d^{(k-1)} = -\nabla f(x^{(k-1)})$ und $\alpha^{(k-1)} = \frac{(b - Ax^{(k-1)})^\top d^{(k-1)}}{(Ad^{(k-1)})^\top d^{(k-1)}}$, und gegebenem $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ die Abschätzung

$$\|x^{(k)} - x^*\|_A \leq \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa}\right)^k \|x^{(0)} - x^*\|_A$$

gilt, wobei x^* der eindeutige Minimierer von f , κ die 2-Konditionszahl von A und $\|x\|_A = \sqrt{x^\top Ax}$ ist.

Die folgenden Aufgaben sind Beispiele für mögliche weitere Klausuraufgaben:**Aufgabe 5. Konditionierung**

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reguläre $n \times n$ Matrizen. Zeigen Sie, dass gilt

$$\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B),$$

wobei $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ die Konditionszahl bezüglich einer gegebenen Operatornorm $\|\cdot\|$ darstellt.

Aufgabe 6. Nodales Polynom

Es sei

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

das nodale Polynom zu den Knoten $(x_i)_{i=0}^n$. Zeigen Sie, dass für dessen Ableitung gilt

$$\omega'_{n+1}(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j).$$

Aufgabe 7. Gershgorin

Zeigen Sie, dass das Spektrum $\sigma(A)$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

die Abschätzung $\sigma(A) \subset [-2, 9]$ erfüllt.