Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Dr. K. Anguige

Wintersemester 2016

Numerik 1
Blatt 7
Lösungen

Aufgabe 34.
Die nichttriviale Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 0$, also $\rho(A) = 0$.
Für $n = 1, 2, \ldots$, definiere

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_n = \max\{n|x_1|, |x_2|\}.$$

($\|\cdot\|_n$ ähnelt der l_∞-Norm, und die Normaxiome gelten genauso.)
Folglich gilt

$$\|A\|_n = \sup \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\|_n}{\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_n} = \sup \frac{|x_1|}{\max\{n|x_1|, |x_2|\}} \to 0,$$

für $n \to \infty$.

Aufgabe 35.

$$x^{k+1} = -(D+U)^{-1} L x^k + (D+U)^{-1} b.$$

Nach Lemma 9.1 aus Bartels gilt $a_{ii} \neq 0$ und daher ist $D + U$ invertierbar und die obige Vorschrift wohldefiniert.
Sei $M := -(D+U)^{-1}L$. Wir zeigen, dass $M - \mu I$ regulär ist für $|\mu| \geq 1$ ($\Rightarrow \rho(M) < 1 \Rightarrow$ Konvergenz).
Sei $M^* = M - \mu I$, sodass M^* regulär $\Leftrightarrow \widetilde{M} := -(U+D)M^*$ regulär ($U + D$ ist eine obere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonalelementen).
Es gilt $\widetilde{M} = L + \mu U + \mu D$ und folglich ist $\widetilde{M}$ irreduzibel ($\tilde{m}_{ij} = 0 \Rightarrow \tilde{a}_{ij} = 0$, da $\mu \neq 0$).
Nach Lemma 9.1 bleibt es zu zeigen, dass für $|\mu| \geq 1$ $\widetilde{M}$ diagonaldominant ist:

$$\sum_{j=1,\ldots,n, j\neq i} |\tilde{m}_{ij}| = |\mu| \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \leq |\mu| \sum_{j=1,\ldots,n, j\neq i} |a_{ij}| \leq |\mu||a_{ii}| = |\tilde{m}_{ii}|,$$

mit strikter Ungleichheit für ein $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$. $\widetilde{M}$ ist also irreduzibel und diagonaldominant.

Aufgabe 36.
Sei

$$PAP^T = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix},$$

wobei '0' die Größe $p \times q$ mit $p + q = n$ hat.
Also es gilt

$$A = P^T \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} P.$$

P^T von links vertauscht Zeilen und P von rechts vertauscht Spalten $\Rightarrow$ A reduzibel.
Andere Richtung: Wähle P so, dass die Zeilen mit den Nullen auf die letzten p Zeilen und anschliessend die Spalten mit den Nullen auf die ersten q Spalten abgebildet werden (durch vor- bzw. nachmultiplikation mit P bzw. P^T). Dies ist möglich da die Indexmengen I und J (die die Nullen etikettieren) disjunkt sind.

Aufgabe 37.
Sei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gelten $\|A\|_1 = \frac{1}{2}$ und $\|A\|_\infty = 1$. A ist also eine 1-Kontraktion aber keine ∞-Kontraktion.

Aufgabe 38.
Die Eigenwerte von A sind $\lambda = 1, \frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$ (letztere sind $\approx 4.75, 0.25$).
Householder Transformation für die zweite Spalte: Setze $c = (0,3,1)^T$ und $v = |c|e_2 - c \approx (0, 0.16, -1)$. Setze $u = v/\|v\| \approx v$.
Householder-Matrix:

$$Q = \mathrm{Id} - 2uu^T \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0.32 \\ 0 & 0.32 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ausserdem ist

$$R = QA \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3.32 & 5.32 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

und RQ hat die Diagonaleinträge $\approx 1, 4.9, -0.6$. Zwei davon liegen nicht ganz so weit von den Eigenwerten entfernt.