Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Keith Anguige

Sommersemester 2017

Praktikum zu Numerik 2
Blatt 2
(Abgabe: 31. Mai 2017)

Aufgabe 4. (8 Punkte)

Implementieren Sie eine Matlab-Funktion `xt = neville(X, Y, t)`, die das interpolierende Polynom zu den Stützpunkten (x_i, y_i) aus `X` $\times$ `Y` an den Stellen in `t` auswertet und die Werte als Vektor `xt` zurückgibt und dazu das Neville-Schema in nichtrekursiver Form (siehe Bartels, Abb. 11.4) nutzt. Verwenden Sie diese Funktion, um das Interpolationspolynom der Funktion $f(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$ bezüglich Äquidistanter Stützstellen $-1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ sowie Tschebyscheff-Knoten $-1 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leq 1$ an den Punkten $x_a = \pi/8$ und $x_b = \pi/4$ für $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32$ auszuwerten. Schreiben Sie ebenfalls eine Hilfsfunktionen `X = tscheby(a,b,n)` um die Tschebyscheff-Knoten zu generieren. Kommentieren Sie Ihre Beobachtungen.

Aufgabe 5. (8 Punkte)

Das Verfahren der *dividierten Differenzen* ist eng verbunden mit dem Neville-Schema, und sieht wie folgt aus:

Die Koeffizienten λ_j, $j = 0, 1, \ldots, n$ des Lagrange-Interpolationspolynoms bezüglich der Newton-Basis $(q_0, q_1, \ldots, q_n)$, definiert durch $q_0 = 1$ und

$$q_j(x) = \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k),$$

$j = 1, 2, \ldots, n$, werden durch die folgende Iterationsvorschrift bestimmt.
Für Stützpaare (x_i, y_i) initialisiere $y_{i,0} = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, und für $1 \leq j \leq n$, $0 \leq i \leq n - j$ definiere

$$y_{i,j} = \frac{y_{i+1,j-1} - y_{i,j-1}}{x_{i+j} - x_i}.$$

Dann gilt $\lambda_j = y_{0,j}$, $j = 0, 1, \ldots, n$ (Beweis: Unpraktische-Übung, A.11!).
Die Auswertung des Interpolationspolynoms erfolgt dann effizient mit dem *Horner-Schema*, das heißt mittels der Darstellung

$$p(x) = \lambda_0 + (x - x_0) \left[\lambda_1 + (x - x_1) \left[\lambda_2 + \ldots \left[\lambda_{n-1} + (x - x_{n-1})\lambda_n\right] \ldots\right]\right].$$

(1) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `P = divdiv(X,Y)` zur Bestimmung der Koeffizienten eines Interpolationspolynoms bezüglich der Newton-Basis für gegebene Stützstellen `X` und zugehörige Stützwerte `Y`.

(2) Testen Sie Ihr Programm für die Funktionen $f(x) = \sin(\pi x)$, $g(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$ und $h(x) = |x|$ im Intervall $[-1, 1]$ bei Verwendung von Äquidistanten Stützstellen und Tschebyscheff-Knoten. Schreiben Sie eine Funktion `p = horner(X,P,Z)`, welche die Interpolationspolynome gegeben durch die Koeffizienten in `P` und Stützstellen `X` an den Punkten eines Vektors `Z` auswertet. Testen Sie dies mit den Punkten $z_j = -1 + 2j/100$, $j = 0, 1, \ldots, 100$ und plotten Sie damit die Interpolationspolynome für $n = 1, 2, 4, 8$.

Hinweis zur Abgabe: Laden Sie bitte die Vorlage auf der Seite der Vorlesung herunter und entpacken Sie diese. Benennen Sie den entpackten Ordner 'Bn_Gruppenname' um in 'Bn_(IhreNamen)'. Arbeiten Sie in diesem Ordner. Speichern Sie die Skripte, in denen die für die Aufgabe relevanten Befehle/Funktionsaufrufe stehen, als 'Aufgabe[n].m'. Verpacken Sie den Ordner 'Bn_(IhreNamen)', (z.B. mit 7Zip) und schicken Sie den verpackten Ordner an numerik_prakt@mathematik.uni-freiburg.de.