Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Keith Anguige

Sommersemester 2017

Praktikum zu Numerik 2
Blatt 5
(Abgabe: 19. Juli 2017)

Aufgabe 10. (8 Punkte)

Aus der Taylor-Formel ergibt sich, dass die Quotienten

(a)
$$d_h^+ f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \hat{d}_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

für eine gegebene Schrittweite $h > 0$ Approximationen von $f'(x)$ mit der Fehlerordnung $\mathcal{O}(h)$ bzw. $\mathcal{O}(h^2)$ definieren. Überprüfen Sie diese Eigenschaft experimentell am Beispiel $f(x) = \tan(x)$ für $x = 1/2$ mit den Schrittweiten $h = 2^{-l},\ l = 1, 2, \ldots, 15$.

(b) Konstruieren Sie durch Extrapolation einen Quotienten $\hat{d}_h^* f(x)$, der die Ableitung $f'(x)$ bis auf einen Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(h^4)$ approximiert und wiederholen Sie die Rechnungen. Welche Vor- und Nachteile besitzt die Approximation der Ableitung mittels Extrapolation?

Aufgabe 11. (8 Punkte)

(a) Untersuchen Sie experimentell die Konvergenz des Verfahrens von Heron zur Berechnung einer Quadratwurzel, das heißt der Iterationsvorschrift

$$x_{k+1} = (x_k + a/x_k)/2,$$

für $a = 3/2$ und verschiedene Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$.

(b) Das Newtonverfahren zur Nullstellensuche für eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wird durch folgende Iterationsvorschrift definiert:

$$\text{Sei } \zeta_0 \in \mathbb{C} \text{ und für } k \geq 1 \text{ sei} \quad \zeta_{k+1} = \zeta_k - Df(\zeta_k)^{-1} f(\zeta_k),$$

wobei mit $Df(\zeta_k)^{-1}$ das Teilen durch die Ableitung der holomorphen Funktion f gemeint ist. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit Nullstellen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ und partitioniere die komplexe Ebene in Einzugsbereiche $E_j \subset \mathbb{C}$, die für $j = 1, 2, \ldots, n$ durch

$$E_j = \{z \in \mathbb{C} : \text{Newton} - \text{Verfahren mit Startwert } z \text{ konvergiert gegen } z_j\}$$

definiert sind, sowie die Restmenge $X = \mathbb{C} \setminus \cup_{j=1}^n E_j$. Betrachten Sie die Funktion $f(z) = z^3 - 1$ und verwenden Sie als Startwerte Gitterpunkte $z_l = x_l + iy_l$ im Bereich $[-1.5, 1.5]^2 \in \mathbb{C}^2$, die im Abstand $h = 1/200$ angeordnet sind. Markieren Sie die Punkte unterschiedlich entsprechend der Zugehörigkeit zum Einzugsbereich einer Nullstelle und stellen Sie diese grafisch (z.B. mit `pcolor` dar.

Hinweis zur Abgabe: Laden Sie bitte die Vorlage auf der Seite der Vorlesung herunter und entpacken Sie diese. Benennen Sie den entpackten Ordner 'Bn_Gruppenname' um in 'Bn_(IhreNamen)'. Arbeiten Sie in diesem Ordner. Speichern Sie die Skripte, in denen die für die Aufgabe relevanten Befehle/Funktionsaufrufe stehen, als 'Aufgabe[n].m'. Verpacken Sie den Ordner 'Bn_(IhreNamen)', (z.B. mit 7Zip) und schicken Sie den verpackten Ordner an numerik_prakt@mathematik.uni-freiburg.de.