Aufgabe 1 (4+1+1 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie für alle (reellen) Werte von a die Eigenwerte und Eigenräume.

(b) Ist A für alle a diagonalisierbar? Wenn ja, welcher Diagonalmatrix ist sie ähnlich?

(c) Ist A orthogonal?

(a) Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & a & 1 \\ a & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2-\lambda & 0 \end{vmatrix} + (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ a & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -(2-\lambda) + (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - a^2) = (2-\lambda)\Big(\lambda^2 - 2\lambda - (a^2+1)\Big). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also 2, $1 - \sqrt{a^2+2}$ und $1 + \sqrt{a^2+2}$. Die entsprechenden Eigenräume sind:

- $\ker(A - 2E) = \ker\left(\begin{smallmatrix} -2 & a & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}$,
- $\ker\Big(A - (1-\sqrt{a^2+2})E\Big) = \ker\left(\begin{smallmatrix} -1+\sqrt{a^2+2} & a & 1 \\ a & 1+\sqrt{a^2+2} & 0 \\ 1 & 0 & 1+\sqrt{a^2+2} \end{smallmatrix}\right) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{a^2+2} \\ -a \\ -1 \end{pmatrix}$,
- $\ker\Big(A - (1+\sqrt{a^2+2})E\Big) = \left(\begin{smallmatrix} -1-\sqrt{a^2+2} & a & 1 \\ a & 1-\sqrt{a^2+2} & 0 \\ 1 & 0 & 1-\sqrt{a^2+2} \end{smallmatrix}\right) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{a^2+2} \\ -a \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Für jedes a ist A symmetrisch und infolgedessen diagonalisierbar. Hier konkret ist A ähnlich zu

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{a^2+2} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{a^2+2} \end{pmatrix}.$$

(c) A ist für kein a orthogonal. Die Spalten einer orthogonalen Matrix bilden nämlich eine Orthonormalbasis. Hier ist die dritte Spalte nicht 1 lang.

Aufgabe 2 (1+3+2 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 3 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 3 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_4 + x_5 &= 1 \end{aligned}$$

(a) Schreiben Sie das Gleichungssystem in der Matrixform $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ um.

(b) Bringen Sie das System auf die Zeilenstufenform.

(c) Lösen Sie das obige System, d. h. bestimmen Sie seine allgemeine Lösung.

(a) Das System kann man umschreiben als $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Links oben steht bereits keine Null. Um darunter überall Nullen zu bekommen, müssen wir nur noch die erste Zeile von der zweiten abziehen. Anschließend addieren wir für die zweite Spalte die zweite Zeile zur dritten und vierten. Am Ende vertauschen wir noch die letzten zwei Zeilen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(c) Aus (b) folgt, dass das System lösbar ist und dass $\dim \ker A = 1$ ist. Es sei $x_5 = t$ beliebig. Dann folgt von unten nach oben:

$$\begin{aligned} x_4 + x_5 = 1 &\Rightarrow x_4 = 1 - t, \\ x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 &\Rightarrow x_3 = 2 - t, \\ -x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 &\Rightarrow x_2 = t - 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 &\Rightarrow x_1 = 1. \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung ist

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 3 (2+4 Punkte)

Es seien die Vektoren

$$\boldsymbol{g}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(in der Standardbasis) gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $\underline{G} := (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungen von $\boldsymbol{v}$ und A in $\underline{G}$.

(a) Weil $\underline{G}$ aus 3 Vektoren besteht, reicht es zu zeigen, dass die Vektoren linear unabhängig sind. Angenommen, für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda_1 \boldsymbol{g}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{g}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{0}$$

bzw.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der letzten Zeile folgt $\lambda_1 = 0$, folglich aus der ersten $\lambda_3 = 0$ und schließlich aus der zweiten $\lambda_2 = 0$.

(b) Da $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}_1 - \boldsymbol{g}_2$, ist

$$\boldsymbol{v}_{\underline{G}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $A_{\underline{G}}$ haben wir die Formel

$$A_{\underline{G}} = T^{-1} A T$$

wobei T die Transformationsmatrix des Basiswechsels von der Standardbasis zu $\underline{G}$ ist, also

$$T = \mathrm{id}_{\underline{EG}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen zuerst die Inverse von T bestimmen. Wir vertauschen die erste und dritte Zeile und ändern anschließend das Vorzeichen der ersten Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots$$

ziehen die erste Zeile von der dritten ab und ihr Zweifaches von der zweiten Zeile ab. Anschließen subtrahieren wir die dritte Zeile von der zweiten und teilen diese durch 2:

$$\ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Also

$$A_{\underline{G}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)

Beweisen Sie die nachstehenden Aussagen:

(a) Für alle $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt:

$$\langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, A^T\boldsymbol{v}\rangle.$$

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, λ und μ zwei verschiedene Eigenwerte von A und $\boldsymbol{u}$ bzw. $\boldsymbol{v}$ zugehörige Eigenvektoren. Dann sind $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ orthogonal zueinander.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle &= \sum_{i=1}^{m}(A\boldsymbol{u})_i v_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}u_j\right)v_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}u_j v_i = \\ &= \sum_{j=1}^{n} u_j\left(\sum_{i=1}^{m} A_{ij}v_i\right) = \sum_{j=1}^{n} u_j\left(\sum_{i=1}^{m}(A^T)_{ji}v_i\right) = \sum_{j=1}^{n} u_j(A^T\boldsymbol{v})_j = \langle \boldsymbol{u}, A^T\boldsymbol{v}\rangle\end{aligned}$$

(b) Wegen $A = A^T$ gilt $\langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}\rangle$ nach (a). Andererseits ist

$$\langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \lambda\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \lambda\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle \quad \text{und} \quad \langle \boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \mu\boldsymbol{v}\rangle = \mu\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle.$$

Da $\lambda \neq \mu$, muss $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$ sein.

Aufgabe 5 (4+2 Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x^2 - 2x + e^{y^2}.$$

(a) Berechnen Sie das Maximum und Minimum (und alle Stellen, wo sie angenommen werden) von f im Quadrat $K := [-2, 2] \times [-2, 2]$.

(b) Bestimmen Sie das zweite Taylor-Polynom von f um $(2, 0)$.

(a) Die Funktion f ist stetig und K ist kompakt, also nimmt f auf K ihr Minimum und Maximum an. Das kann im Inneren und auf dem Rand passieren.

Die Kandidaten im Inneren sind die stationären Punkte, also die Nullstellen der Ableitung. Es ist

$$Df(x, y) = (2x - 2, 2ye^{y^2})$$

Offenbar $Df(x, y) = \mathbf{0} \iff (x, y) = (1, 0)$. Dieser Punkt liegt tatsächlich im Inneren und $f(1, 0) = -1$.

Der Rand besteht aus 4 Strecken: $\{\pm 2\} \times [-2, 2]$ und $[-2, 2] \times \{\pm 2\}$. Für die letzteren zwei gilt

$$f(x, \pm 2) = x^2 - 2x + e^4.$$

Diese Parabeln haben Minimum $f(1, \pm 2) = e^4 - 1$ und Maximum $f(-2, \pm 2) = e^4 + 8$. Für die linke Strecke gilt

$$f(-2, y) = 8 + e^{y^2}.$$

Hier bekommen wir keine Kandidaten für Minimum, da die Werte positiv sind. Das Maximum auf der Strecke ist $f(-2, \pm 2) = e^4 + 8$. Noch die rechte Strecke. Dort haben wir

$$f(2, y) = e^{y^2}.$$

Offenbar sind Werte positiv und kleiner wir auf der linken Strecke, also werden hier keine Extrema angenommen.

Zusammengefasst, das Minimum von f auf K ist -1 und wird in $(1, 0)$ angenommen und das Maximum ist $e^4 + 8$ in $(-2, \pm 2)$.

(b) Es gilt

$$f(2, 0) = 1, \quad \partial_x f(2, 0) = 2, \quad \partial_y f(2, 0) = 0.$$

Weiterhin haben wir

$$\partial^2_{xx} f(x, y) = 2, \quad \partial^2_{xy} f(x, y) = 0, \quad \partial^2_{yy} f(x, y) = (2 + y^2)e^{y^2},$$

also $\partial^2_{yy} f(2, 0) = 2$. Demnach ist

$$Tf(x, y) = 1 + 2(x - 2) + (x - 2)^2 + y^2.$$

Aufgabe 6 (1+2+3 Punkte)

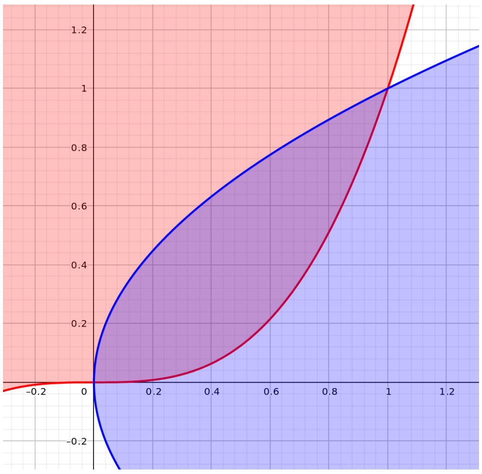
Es sei
$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^3,\ x \geq y^2\}.$$

(a) Skizzieren Sie die Menge M.

(b) Bestimmen Sie deren Flächeninhalt.

(c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_M y^3 x^2 \; dx \; dy$.

(a) Die Menge M ist die Schnittmenge auf dem Bild:



(b) Nach dem Cavalieri'schen Prinzip ist der Flächeninhalt

$$\int_M 1 \; dx \; dy = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dy \; dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3) \; dx = \left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

(c) Ähnlich wie oben

$$\begin{aligned} \int_M y^3 x^2 \; dx \; dy &= \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} y^3 x^2 \; dy \; dx \\ &= \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^4}{4} \right]_{x^3}^{\sqrt{x}} \; dx \\ &= \int_0^1 x^2 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^{12}}{4} \right) \; dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (x^4 - x^{14}) \; dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^{15}}{15} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{15} \right) \\ &= \frac{1}{30} \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (3+2+1 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{F} : (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{F}(x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{y^2}{x} \\ 2y\ln x + z^2 \\ 2yz \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie dessen Jacobi-Matrix, Divergenz und Rotation (in beliebigem Punkt).

(b) Ist $\boldsymbol{F}$ ein Gradientenfeld? Wenn ja, bestimmen Sie sein Potential.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$, wobei $\boldsymbol{\gamma}$ die Strecke von $(1,4,1)$ bis $(2,1,0)$ ist.

(a) Nach der Definitionen ist die Jacobi-Matrix

$$D\boldsymbol{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1 & \partial_2 F_1 & \partial_3 F_1 \\ \partial_1 F_2 & \partial_2 F_2 & \partial_3 F_2 \\ \partial_1 F_3 & \partial_2 F_3 & \partial_3 F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} & 0 \\ \frac{2y}{x} & 2\ln x & 2z \\ 0 & 2z & 2y \end{pmatrix},$$

die Divergenz

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(x,y,z) = \operatorname{Spur}\, D\boldsymbol{F}(x,y,z) = -\frac{y^2}{x^2} + 2\ln x + 2y$$

und die Rotation

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Weil $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ ist und der Definitionsbereich $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend (sogar sternförmig) ist, ist $\boldsymbol{F}$ ein Gradientenfeld. Wir suchen ein $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $\operatorname{grad} u = \boldsymbol{F}$. Also muss gelten

$$\begin{pmatrix} \partial_1 u(x,y,z) \\ \partial_2 u(x,y,z) \\ \partial_3 u(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{x} \\ 2y\ln x + z^2 \\ 2yz \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Zeile folgt

$$u(x,y,z) = \int \frac{y^2}{x}\, dx + C(y,z) = (\ln x)y^2 + C(y,z).$$

Verwendet man das in der zweiten Zeile, so ergibt sich

$$\partial_2 u(x,y,z) = 2y\ln x + z^2 \;\Rightarrow\; 2y\ln x + \partial_y C(y,z) = 2y\ln x + z^2 \;\Rightarrow\; \partial_y C(y,z) = z^2.$$

Somit ist

$$C(y,z) = \int z^2\, dy + D(z) = yz^2 + D(z).$$

Noch die letzte Gleichung

$$\partial_3 u(x,y,z) = 2yz \;\Rightarrow\; 2yz + D'(z) = 2yz \;\Rightarrow\; D'(z) = 0.$$

Also ist D eine Konstante. Ein Potential ist

$$u(x,y,z) = (\ln x)y^2 + yz^2.$$

(c) Kurvenintegral eines Gradientenfeldes ist einfach die Differenz des Potentials im End- und Startpunkt der Kurve, also

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = u(2,1,0) - u(1,4,1) = \ln 2 - 4.$$

Alternativ kann man das Integral auch mit der Definition und Parametrisierung der Kurve ausrechnen (was deutlich aufwendiger ist).