Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

Sommersemester 2019

Numerik 2

Blatt 1

Konditionierung, Gleitkommaarithmetik

Präsenzaufgaben

Diese Aufgaben sind nicht abzugeben und werden am 9. und 10. Mai in den Übungen besprochen.

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie die relative Konditionalzahl an einer beliebigen Stelle für

(a) $\phi(x) = \frac{1}{1+x^2}$,
(b) $\phi(x, y) = e^x + 2y$.

Aufgabe 2.

(a) Sei $\phi(b) = A^{-1}b$. Zeigen Sie, dass

$$\kappa_\phi(b) \leq \mathrm{cond}(A).$$

Ferner, dass ein $b \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass Gleichheit gilt.

(b) Sei $\phi(A) = A^{-1}b$. Zeigen Sie, dass

$$\kappa_\phi(A) \leq \mathrm{cond}(A).$$

Aufgabe 3.
Zeigen Sie, dass sich jede Gleitkommazahl $g \in G$ als b-adische Summe darstellen lässt, d. h. es gilt

$$g = \pm b^e(d_1 b^{-1} + d_2 b^{-2} + \ldots + d_p b^{-p}),$$

mit Ziffern $d_1, d_2, \ldots, d_p \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ und $e_{\min} \leq e \leq e_{\max}$.
Ferner, dass für normalisierte Gleitkommazahlen diese Darstellung eindeutig definiert (mit $d_1 \neq 0$) ist.

Aufgabe 4.

(a) Berechnen Sie die Anzahl der Gleitkommazahlen sowie die positiven Extrema $g_{\min}$ und $g_{\max}$ für die IEEE-Formate *single* und *double precision*.
(b) Bestimmen Sie $\mathrm{rd}(\pi)$ für $b = 2$, $p = 7$ und $b = 10$, $p = 5$.
(c) Wie lässt sich das Auftreten von *Overflow* bei der Berechnung von $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ vermeiden, wenn $\max\{|a|, |b|\} > g_{\max}^{\frac{1}{2}}$ und $|a|, |b| \leq g_{\max}/2$ gilt?

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind in den richtigen Briefkasten zur *Numerik Teil II* (Hermann-Herder-Str. 10, 2. Stock) abzugeben. Die Abgabefrist ist Dienstag, der 21. Mai 2019, um 10 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihren Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.**
Zeigen Sie, dass sich jede Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bezüglich einer Basis $b \geq 2$ in der Form

$$x = \pm b^e \sum_{k=1}^{\infty} d_k b^{-k},$$

mit $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ und $e \in \mathbb{Z}$ darstellen lässt, wobei $d_1 \neq 0$ gewählt werden kann.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.**

(a) Beweisen Sie, dass die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ in Gleitkommaarithmetik konvergiert.
(b) Zeigen Sie, dass die Gleitkommaaddition '$+_G$' *nicht* assoziativ ist.

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.**
Verwenden Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren ohne beziehungsweise mit Pivotsuche zur Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0.1 \cdot 10^{-3} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie dabei Dezimalzahlen mit Präzision $p = 3, 4, 5$, d. h. arbeiten Sie unter Verwendung geeigneter Rundung mit Zahlen der Form $\pm 0.d_1 d_2 \ldots d_p \cdot 10^e$ mit $e \in \mathbb{Z}$ und $d_1, d_2, \ldots, d_p \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.**
Berechnen Sie $f(0.00001)$ mit einer Genauigkeit von 12 Dezimalstellen, wobei

$$f(x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x^2}}{x \sin x}.$$

Hinweis: Taylor.
Bemerkung: Warum funktioniert die naive Berechnung der Funktion nicht gut?