Albert-Ludwigs-Universität Freiburg — Sommersemester 2019
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

Numerik 2

Blatt 2

Polynominterpolation

Präsenzaufgaben

Diese Aufgaben sind nicht abzugeben und werden am 23. und 24. Mai in den Übungen besprochen.

Aufgabe 9.

Sei $f \in C^2([a,b])$ mit der Eigenschaft $f(a) = f(b)$ und $f'(a) = f'(b) = 0$. Geben Sie eine optimale untere Schranke für die Anzahl der Nullstellen von f'' an.

Aufgabe 10.

Für Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ sei $w(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ das Stützstellenpolynom und $L_i, i = 0, 1, \dots, n$, das i-te Lagrange-Basispolynom. Zeigen Sie, dass gilt

$$L_i(x) = \frac{w(x)}{(x - x_i)w'(x_i)}.$$

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind in den richtigen Briefkasten zur *Numerik Teil II* (Hermann-Herder-Str. 10, 2. Stock) abzugeben. Die Abgabefrist ist Dienstag, der 4. Juni 2019, um 10 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihren Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen.

Aufgabe 11 (4 Punkte)**.**

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der für $t \in [-1,1]$ durch $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ definierten Tschebyscheff-Polynome:

(a) Es gilt $\max_{t\in[-1,1]} |T_n(t)| = 1$

(b) Mit $T_0(t) = 1$ und $T_1(t) = t$ gilt

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)$$

für alle $t \in [-1,1]$. Insbesondere gilt $T_n \in \mathcal{P}_n|_{[-1,1]}$.

(c) Für $n \geq 1$ folgt $T_n(t) = 2^{n-1}t^n + q_{n-1}(t)$ mit $q_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}|_{[-1,1]}$.

(d) Für $n \geq 1$ hat T_n die Nullstellen $t_j = \cos((j + 1/2)\pi/n)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, und die $n+1$ Extremstellen $s_j = \cos(j\pi/n), j = 0, 1, \dots, n$, mit $T_n(s_j) = \pm 1$.

Aufgabe 12 (4 Punkte)**.**

Es seien $a \leq x_0 < x_1 \dots < x_n \leq b$ gegebene Stützstellen und $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ Polynome vom maximalen Grad n.

(a) Zeigen Sie, dass die durch $V_{ij} = v_i(x_j)$, $i, j = 0, 1, \dots, n$, definierte Matrix $V \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ genau dann regulär ist, wenn aus $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$ folgt, dass $\alpha_i = 0$ für $i = 0, 1, \dots, n$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass im Fall der Monome $v_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, \dots, n$ gilt

$$\det V = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Aufgabe 13 (4 Punkte)**.**

Für $n+1$ Stützstellen und -werte $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ und $0 \leq j \leq n$ sowie $0 \leq i \leq n-j$ sei $p_{i,j} \in \mathcal{P}_j$ festgelegt durch $p_{i,j}(x_k) = y_k$, $k = i, i+1, \dots, i+j$. Die Zahlen $y_{i,j}$ seien definiert durch $y_{i,0} = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, und

$$y_{i,j} = \frac{y_{i+1,j-1} - y_{i,j-1}}{x_{i+j} - x_i}$$

für $1 \leq j \leq n$ und $0 \leq i \leq n-j$.

(a) Zeigen Sie, dass $p_{i,j}(x) = y_{i,j}x^j + r_{i,j}(x)$ mit einem Polynom $r_{i,j} \in \mathcal{P}_{j-1}$ für $j \geq 1$ und $i = 0, 1, \dots, n-j$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für $q_j(x) = p_{0,j}(x) - p_{0,j-1}(x)$, wobei $p_{0,-1} = 0$ sei, die Darstellung $q_j(x) = y_{0,j} \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i)$ gilt.

(c) Folgern Sie, dass $p_{0,n}(x) = \sum_{j=0}^{n} y_{0,j} \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i)$ gilt.

Aufgabe 14 (4 Punkte)**.**

Seien $x_0 < x_1 \ldots < x_n$ und $l \in \mathbb{N}$. Für $x \in \mathbb{R}$ und $0 \leq j \leq n$ definiere

$$H_{j,l}(x) = \frac{(x - x_j)^l}{l!} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right)^{l+1}.$$

Zeigen Sie, dass für die Ableitungen von $H_{j,l}$ die Identitäten $\frac{d^k}{dx^k} H_{j,l}(x_m) = \delta_{kl}\delta_{jm}$ für $0 \leq k \leq l$ und $0 \leq m \leq n$ gelten.