Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

Sommersemester 2019

Numerik 2

Blatt 3

Splines

Präsenzaufgabe

Diese Aufgabe ist nicht abzugeben und wird am 6. und 7. Juni in den Übungen besprochen.

Aufgabe 15.
Für die durch die Punkte $x_i = (i/n)^4$, $i = 0, 1, \ldots, n$, definierte Partitionierung von $[0, 1]$ sei $f_n \in \mathcal{S}^{1,0}(\mathcal{T}_n)$ die interpolierende Spline-Funktion von $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$. Zeigen Sie, dass

$$\max_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{c}{n^2},$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten $c > 0$ gilt. Skizzieren Sie f_2 und f_4.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind in den richtigen Briefkasten zur *Numerik Teil II* (Hermann-Herder-Str. 10, 2. Stock) abzugeben. Die Abgabefrist ist Dienstag, der 25. Juni 2019, um 10 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihren Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen.

Aufgabe 16 (4 Punkte)**.**

(a) Seien $0 \leq a < b$ und $x \mapsto g(x)$ die lineare Funktion, die die Funktion $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ an den Stützstellen a und b interpoliert. Zeigen Sie, dass für den Fehler

$$e = \max_{x \in [a,b]} |g(x) - f(x)|$$

die Abschätzungen $e \leq (b-a)^2 a^{-3/2}/8$ im Fall $a > 0$ und $e \leq b^{1/2}/4$ im Fall $a = 0$ gelten.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x_i = i/n$, $i = 0, 1, \ldots, n$, sei $f_n \in \mathcal{S}^{1,0}(\mathcal{T}_n)$ die interpolierende Spline-Funktion von $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ im Intervall $[0, 1]$. Zeigen Sie, dass

$$\max_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{4n^{1/2}}$$

gilt.

(c) In welchen Bereichen ist die Fehlerabschätzung suboptimal?

Aufgabe 17 (4 Punkte)**.**
Es sei durch $\{x_j\}_{j=0}^n$ eine Partition des Intervalls $[a, b]$, sowie Werte $\{y_j\}_{j=0}^n$ gegeben.
Angenommen $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist eine (bezüglich der Partition) stückweise polynomiale Funktion vom Grad 3, also

$$s|_{[x_j, x_{j+1}]} = p_j, \quad j = 0, \ldots, n-1$$

mit

$$p_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + \frac{\gamma_j}{2}(x - x_j)^2 + \frac{d_j}{6}(x - x_j)^3.$$

Weiterhin gelte für alle $j = 0, \ldots, n-1$ und alle $i = 0, \ldots, n-2$

- $a_j = y_j$,
- $b_j = (y_{j+1} - y_j)/h_j - \frac{1}{2}\gamma_j h_j - \frac{1}{6} d_j h_j^2$,

- $h_i \dfrac{\gamma_i}{6} + \dfrac{(h_{i+1} + h_i)}{2} \dfrac{4\gamma_{i+1}}{6} + h_{i+1} \dfrac{\gamma_{i+2}}{6} = \dfrac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$,
- $d_j = (\gamma_{j+1} - \gamma_j)/h_j$,

wobei $h_j = x_{j+1} - x_j$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Funktion s dann zweimal stetig differenzierbar ist. Zeigen Sie für alle $j = 0, \ldots, n$

(a) $s(x_j) = y_j$,
(b) $s''(x_j) = \gamma_j$.

Aufgabe 18 (4 Punkte)**.**

Bestimmen Sie explizit die interpolierenden kubischen Splines mit den natürlichen sowie Hermite-Randbedingungen $s'(-1) = 0,\ s'(1) = 3$ für die Stützstellen $x_i = -1 + i/2$ und Stützwerte $y_i = (-1)^i,\ i = 0, 1, 2, 3, 4$, und zeichnen Sie diese.

Aufgabe 19 (4 Punkte)**.**

Die Funktionen $B_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}$, seien durch die Rekursion

$$B_{m+1}(x) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} B_m(t)\ dt$$

mit der Initialisierung $B_0(x) = 1$ für $|x| \leq 1/2$ und $B_0(x) = 0$ für $|x| > 1/2$ definiert.

(a) Zeigen Sie, dass B_m nichtnegativ ist und $B_m(x) = 0$ für $|x| > (m+1)/2$ gilt.
(b) Zeigen Sie, dass mit der durch die Punkte $x_i = i - (m+1)/2,\ i = 0, \ldots, m+1$, definierten Partitionierung $\mathcal{T}_{m+1}$ des Intervalls $[-(m+1)/2, (m+1)/2]$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Spline-Funktion $B_m \in \mathcal{S}^{m,m-1}(\mathcal{T}_{m+1})$ definiert wird.
(c) Bestimmen Sie die Funktionen B_1, B_2 und B_3 explizit und skizzieren Sie diese.