Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

Sommersemester 2019

Numerik 2

Blatt 4

Diskrete Fourier-Transformation

Präsenzaufgabe

Diese Aufgabe ist nicht abzugeben und wird am 27. und 28. Juni in den Übungen besprochen.

Aufgabe 20.

Seien $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1} \in \mathbb{C}$ und $n = 2m$. Konstruieren Sie Zahlen $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{C}$, so dass mit den Koeffizienten $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1} \in \mathbb{C}$ der Lösung der zugehörigen komplexen trigonometrischen Interpolationsaufgabe und der Funktion

$$q(x) = \sum_{k=-m}^{m-1} \beta_{k+m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

die Interpolationseigenschaft $q(x_j) = w_j$ für $j = 0, 1, \ldots, n-1$ und $x_j = 2\pi j/n$ erfüllt ist.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind in den richtigen Briefkasten zur *Numerik Teil II* (Hermann-Herder-Str. 10, 2. Stock) abzugeben. Die Abgabefrist ist Dienstag, der 9. Juli 2019, um 10 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihren Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen.

Aufgabe 21 (4 Punkte)**.**

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}lk2\pi/n} = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ Teiler von } l, \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

(b) Folgern Sie, dass die Fourier-Basis $(\omega^0, \omega^1, \ldots, \omega^{n-1})$ mit $\omega^k = (\omega_n^{0k}, \omega_n^{1k}, \ldots, \omega_n^{(n-1)k})^\top$, $k = 0, \ldots, (n-1)$ und der n-ten komplexen Einheitswurzel $\omega_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/n}$ die Eigenschaft

$$\omega^k \cdot \omega^l = n\delta_{kl}$$

besitzt.

Aufgabe 22 (4 Punkte)**.**

Zu gegebenen $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{C}$ seien T und p die Lösungen der reellen beziehungsweise komplexen trigonometrischen Interpolationsaufgabe. Zeigen Sie, dass

$$T(x_j) = p(x_j) \quad \text{für } x_j = 2\pi j/n,\ j = 0, \ldots, n-1$$

erfüllt ist aber im Allgemeinen nicht $p = T$ gilt.

Aufgabe 23 (4 Punkte)**.**

Zeigen Sie, dass die Lösung der reellen trigonometrischen Interpolationsaufgabe durch die Koeffizienten

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} y_j \cos(kx_j) \quad b_l = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} y_j \sin(lx_j)$$

für $k = 0, 1, \ldots, m$ und $l = 1, 2, \ldots, m-1$ mit $x_j = 2\pi j/n$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ und $n = 2m$ gegeben ist.

Aufgabe 24 (4 Punkte)**.**
Folgern Sie aus Aufgabe 23, dass die Vektoren

$$f^k = (\cos(kx_j))_{j=0,\ldots,n-1}, \quad g^l = (\sin(lx_j))_{j=0,\ldots,n-1},$$

mit k und l wie oben eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^n$ definieren.