Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

Sommersemester 2019

# Numerik 2

Blatt 5

*Quadratur*

## Präsenzaufgabe

Diese Aufgabe ist nicht abzugeben und wird am 11. und 12. Juli in den Übungen besprochen.

**Aufgabe 25.**

Sei $Q : C^0([a,b]) \to \mathbb{R}$ eine Quadraturformel mit Quadraturpunkten $(x_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ und Gewichten $(w_i)_{i=0,1,\ldots,n}$, die exakt vom Grad $n$ ist.

(1) Zeigen Sie, dass

$$w_i = \int_a^b L_i(x)\ dx,$$

für $i = 0, 1, \ldots, n$ mit den durch die Stützstellen $(x_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ definierten Lagrange-Basispolynomen $(L_i)_{i=0,1,\ldots,n}$.

(2) Zeigen Sie, dass im Fall der Exaktheit vom Grad $2n$ gilt, dass $w_i > 0$ für $i = 0, 1, \ldots, n$.

## Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind in den richtigen Briefkasten zur *Numerik Teil II* (Hermann-Herder-Str. 10, 2. Stock) abzugeben. Die Abgabefrist ist Dienstag, der 23. Juli 2019, um 10 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihren Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen.

**Aufgabe 26** (5 Punkte)**.**

Die Quadraturformel $Q : C^0([a,b]) \to \mathbb{R}$ sei exakt vom Grad $2q$ und die zugehörigen Gewichte $(w_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ und Knoten $(x_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ seien symmetrisch bezüglich dem Intervallmittelpunkt $(a+b)/2$ angeordnet. Zeigen Sie, dass $Q$ exakt vom Grad $2q+1$ ist.

**Aufgabe 27** (5 Punkte)**.**

Sei $\langle f, g\rangle_\omega = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)\ dx$ und beweisen Sie den folgenden Satz:

*Es existieren Orthogonalpolynome $(\pi_j)_{j=0,1,\ldots,n}$ derart, dass $\pi_j \in \mathcal{P}_j$ und $\langle \pi_j, \pi_k\rangle_\omega = \delta_{jk}$ für alle $0 \leq j, k \leq n$ mit $j \neq k$ gilt. Insbesondere gilt $\langle \pi_j, p\rangle_\omega = 0$ für alle $p \in \mathcal{P}_{j-1}$ und die Polynome bilden eine Basis von $\mathcal{P}_n$.*

**Aufgabe 28** (6 Punkte)**.**

Verwenden Sie die Darstellung des Fehlers der Lagrange-Interpolation

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j),$$

$\xi(x) \in [a,b]$, um für die Trapez- beziehungsweise Simpson-Regel zu beweisen, dass

$$|I(f) - Q_{\text{Trap}}(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_{C^0([a,b])},$$

$$|I(f) - Q_{\text{Sim}}(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{192} \|f^{(4)}\|_{C^0([a,b])}.$$

*Tipp:* Für die Simpson-Regel verwenden Sie den Hauptsatz und eine schöne Eigenschaft des Polynoms $(x-a)(x-b)(x-\frac{a+b}{2})$.