Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

Sommersemester 2019

Numerik 2

Klausurvorbereitungsblatt
keine Abgabe

Eine der folgenden vier Aufgaben wird so in der Klausur gestellt.

Aufgabe 1. *Cholesky*

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix und $b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(m)} \in \mathbb{R}^n$. Es sei $A = LL^\top$ die Cholesky-Zerlegung von A mit der unteren Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Vergleichen Sie den Aufwand der folgenden beiden Vorgehensweisen zur Lösung der m linearen Gleichungssysteme $Ax^{(i)} = b^{(i)}, i = 1, 2, \dots, m$:

(a) Man bestimmt zuerst die Inverse $A^{-1} = (z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(n)})$, indem man n lineare Gleichungssysteme $Az^{(j)} = e_j$ mit der Cholesky-Zerlegung von A für die kanonischen Basisvektoren $e_j \in \mathbb{R}^n$ löst. Anschließend werden $x^{(i)} = A^{-1}b^{(i)}$ mittels der Matrix-Vektor-Multiplikation berechnet.

(b) Mit der Cholesky-Zerlegung von A werden die Lösungen von $Ax^{(i)} = b^{(i)}$ für $i = 1, 2, \dots, m$ bestimmt.

Aufgabe 2. *Iterativ*

Gegeben sei ein lineares System in der Blockform

$$\begin{pmatrix} A_1 & B \\ B & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

mit $A_1, A_2, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x, y, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die folgenden iterativen Methoden, bestimmt durch die Vorschriften:

(i) $A_1x^{(k+1)} + By^{(k)} = b_1,\ Bx^{(k)} + A_2y^{(k+1)} = b_2$,

(ii) $A_1x^{(k+1)} + By^{(k)} = b_1,\ Bx^{(k+1)} + A_2y^{(k+1)} = b_2$.

(a) Schreiben Sie für beide Methoden den Iterationsschritt in der Form

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} + b$$

für eine geeignete Matrix $M \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ und einen geeigneten Vektor $b \in \mathbb{R}^{2n}$ und bestimmen Sie jeweils die notwendigen Eigenschaften von A_1, A_2 und B, so dass er durchführbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Fixpunkt $(x^{(\infty)}, y^{(\infty)})^\top$ der Iterationsvorschrift (falls vorhanden) jeweils eine Lösung des Gleichungssystem ist.

(c) Finden Sie für jede Methode hinreichende Bedingungen an die Spektralradien der involvierten Matrizen für die Konvergenz.

Aufgabe 3. *Stützstellen*

Konstruieren Sie Stützstellen $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ im Intervall $[a, b]$, so dass für die Lagrange-Interpolation p jeder Funktion $f \in C^{n+1([a,b])}$ gilt

$$||f - p||_{C^0([a,b])} \le 2^{-n} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \frac{||f^{(n+1)}||_{C^0([a,b])}}{(n+1)!}.$$

Zeigen Sie die Abschätzung.

Aufgabe 4. *Steilster Abstieg*
Gegeben sein ein quadratisches Funktional

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass bei einem Gradientenabstiegsverfahren zu dieser Energie, also

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \alpha^{(k-1)} d^{(k-1)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

mit $d^{(k-1)} = -\nabla f(x^{(k-1)})$ und $\alpha^{(k-1)} = \frac{(b-Ax^{(k-1)})^\top d^{(k-1)}}{(Ad^{(k-1)})^\top d^{(k-1)}}$, und gegebenem $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ die Abschätzung

$$\|x^{(k)} - x^*\|_A{}^2 \leq \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa}\right)^k \|x^{(0)} - x^*\|_A{}^2$$

gilt, wobei x^* der eindeutige Minimierer von f, κ die 2-Konditionszahl von A und $||x||_A = \sqrt{x^\top Ax}$ ist.

Bemerkung: Nicht nur die ursprüngliche Version ist korrekt, sondern auch die folgende noch strengere Ungleichung

$$\|x^{(k)} - x^*\|_A \leq \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right)^k \|x^{(0)} - x^*\|_A.$$

Der Beweis ist aber deutlich aufwendiger.

Die folgenden Aufgaben sind Beispiele für mögliche weitere Klausuraufgaben:

Aufgabe 5. *Konditionierung*
Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reguläre $n \times n$ Matrizen. Zeigen Sie, dass gilt

$$\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B),$$

wobei $\kappa(A) = ||A||||A^{-1}||$ die Konditionszahl bezüglich einer gegebenen Operatornorm $||\cdot||$ darstellt.

Aufgabe 6. *Nodales Polynom*
Es sei

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

das nodale Polynom zu den Konten $(x_i)_{i=0}^n$. Zeigen Sie, dass für dessen Ableitung gilt

$$\omega'_{n+1}(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j).$$

Aufgabe 7. *Gerschgorin*
Zeigen Sie, dass das Spektrum $\sigma(A)$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

die Abschätzung $\sigma(A) \subset [-2, 9]$ erfüllt.