Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

Sommersemester 2019

Praktikum zu Numerik 2
Blatt 2
(Abgabe: 24. Mai 2019)

Aufgabe 4. (8 Punkte)
Implementieren Sie eine Matlab-Funktion `xt = neville(X, Y, t)`, die das interpolierende Polynom zu den Stützpunkten (x_i, y_i) aus `X` $\times$ `Y` an den Stellen in `t` auswertet und die Werte als Vektor `xt` zurückgibt und dazu das Neville-Schema in nichtrekursiver Form (siehe Bartels, Abb. 11.4) nutzt. Verwenden Sie diese Funktion, um das Interpolationspolynom der Funktion $f(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$ bezüglich äquidistanter Stützstellen $-1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32$ auszuwerten.

Aufgabe 5. (8 Punkte)
Das Verfahren der *dividierten Differenzen* ist eng verbunden mit dem Neville-Schema, und sieht wie folgt aus:
Die Koeffizienten λ_j, $j = 0, 1, \ldots, n$ des Lagrange-Interpolationspolynoms bezüglich der Newton-Basis $(q_0, q_1, \ldots, q_n)$, definiert durch $q_0 = 1$ und

$$q_j(x) = \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k),$$

$j = 1, 2, \ldots, n$, werden durch die folgende Iterationsvorschrift bestimmt.
Für Stützpaare (x_i, y_i) initialisiere $y_{i,0} = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, und für $1 \leq j \leq n$, $0 \leq i \leq n - j$ definiere

$$y_{i,j} = \frac{y_{i+1,j-1} - y_{i,j-1}}{x_{i+j} - x_i}.$$

Dann gilt $\lambda_j = y_{0,j}$, $j = 0, 1, \ldots, n$.
Die Auswertung des Interpolationspolynoms erfolgt dann effizient mit dem *Horner-Schema*, das heißt mittels der Darstellung

$$p(x) = \lambda_0 + (x - x_0) \left[\lambda_1 + (x - x_1) \left[\lambda_2 + \ldots \left[\lambda_{n-1} + (x - x_{n-1})\lambda_n\right] \ldots\right]\right].$$

(1) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `P = divdiv(X,Y)` zur Bestimmung der Koeffizienten eines Interpolationspolynoms bezüglich der Newton-Basis für gegebene Stützstellen `X` und zugehörige Stützwerte `Y`.
(2) Testen Sie Ihr Programm für die Funktionen $f(x) = \sin(\pi x)$, $g(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$ und $h(x) = |x|$ im Intervall $[-1, 1]$ bei Verwendung von äquidistanten Stützstellen.Schreiben Sie eine Funktion `p = horner(X,P,Z)`, welche die Interpolationspolynome gegeben durch die Koeffizienten in `P` und Stützstellen `X` an den Punkten eines Vektors `Z` auswertet. Testen Sie dies mit den Punkten $z_j = -1 + 2j/100$, $j = 0, 1, \ldots, 100$ und plotten Sie damit die Interpolationspolynome für $n = 1, 2, 4, 8$.