Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

Sommersemester 2019

Praktikum zu Numerik 2
Blatt 5
(Abgabe: 12. Juli 2019)

Aufgabe 10. (8 Punkte) *Quadraturkonvergenz*

Verwenden Sie die summierten Trapez- und Simpson-Regeln, um die Integrale im Intervall $[0,1]$ der Funktionen

$$f(x) = \sin(\pi x)\mathrm{e}^x \qquad g(x) = x^{1/3}$$

mit Schrittweiten $h = 2^{-l}$, $l = 1, 2, \ldots, 10$ zu bestimmen. Berechnen Sie jeweils den Fehler e_h und bestimmen Sie die experimentelle Konvergenzraten γ au dem Ansatz $e_h = c_1 h^\gamma$ und der Formel

$$\gamma \approx \frac{\log(e_h/e_H)}{\log(h/H)}$$

für aufeinanderfolgende Schrittweiten H und h. Stellen Sie die Paare h, e_h für die verschiedenen Quadraturformeln vergleichend als Polygonzüge grafisch in logarithmischer Achsenskalierung dar.

Aufgabe 11. (8 Punkte) *Extrapolation*

(a) Aus der Taylor-Formel ergibt sich, dass die Quotienten

$$d_h^+ f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \hat{d}_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

für eine gegebene Schrittweite $h > 0$ Approximationen von $f'(x)$ mit der Fehlerordnung $\mathcal{O}(h)$ bzw. $\mathcal{O}(h^2)$ definieren. Überprüfen Sie diese Eigenschaft experimentell am Beispiel $f(x) = \tan(x)$ für $x = 1/2$ mit den Schrittweiten $h = 2^{-l},\ l = 1, 2, \ldots, 15$.

(b) Konstruieren Sie durch Extrapolation einen Quotienten $\hat{d}_h^* f(x)$, der die Ableitung $f'(x)$ bis auf einen Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(h^4)$ approximiert und wiederholen Sie die Rechnungen. Welche Vor- und Nachteile besitzt die Approximation der Ableitung mittels Extrapolation?