Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

Sommersemester 2019

Praktikum zu Numerik 2
Blatt 6
(Abgabe: 26. Juli 2019)

Aufgabe 12. (8 Punkte)

Das Newtonverfahren zur Nullstellensuche für eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wird durch folgende Iterationsvorschrift definiert:

$$\text{Sei } \zeta_0 \in \mathbb{C} \text{ und für } k \geq 1 \text{ sei} \quad \zeta_{k+1} = \zeta_k - Df(\zeta_k)^{-1} f(\zeta_k),$$

wobei mit $Df(\zeta_k)^{-1}$ das Teilen durch die Ableitung der holomorphen Funktion f gemeint ist.

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit Nullstellen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ und partitioniere die komplexe Ebene in Einzugsbereiche $E_j \subset \mathbb{C}$, die für $j = 1, 2, \ldots, n$ durch

$$E_j = \{z \in \mathbb{C} : \text{Newton-Verfahren mit Startwert } z \text{ konvergiert gegen } z_j\}$$

definiert sind, sowie die Restmenge $X = \mathbb{C} \setminus \cup_{j=1}^n E_j$. Betrachten Sie die Funktion $f(z) = z^3 - 1$ und verwenden Sie als Startwerte Gitterpunkte $z_l = x_l + iy_l$ im Bereich $[-1.5, 1.5]^2 \in \mathbb{C}^2$, die im Abstand $h = 1/200$ angeordnet sind. Markieren Sie die Punkte unterschiedlich entsprechend der Zugehörigkeit zum Einzugsbereich einer Nullstelle und stellen Sie diese grafisch (z.B. mit `pcolor`) dar.

Aufgabe 13. (8 Punkte)

(a) Implementieren Sie das Newton- und das Sekanten-Verfahren zur Nullstellensuche einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in Matlab und testen Sie es mit der Funktion $f(x) = \exp(x) + x^2 - 2$, dem Startwert $x_0 \in \{-1, 0, 1\}$ und dem Abbruchkriterium $|x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-12}$. Beenden Sie das Newton-Verfahren bei Nichterreichen des Abbruchkriteriums mit 100 Iterationen. Vergleichen Sie die Iterationszahlen sowie die Anzahl der von Schritt zu Schritt beibehaltenen Nachkommastellen.

(b) Realisieren Sie die Nullstellenbestimmung von f durch ein Abstiegsverfahren für die Funktion $g(x) = |f(x)|^2$ und vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit mit der des Newton-Verfahrens.