Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
M.Sc. Eng. Aristide C. Hounkpe

Wintersemester 2020

Praktische Übung zu Numerik für Differentialgleichungen:Blatt 2

Abgabe: 0.6 Juli

Mehrschrittverfahren

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.** Wir betrachten das Anfangswertproblem $y' = f(t, y)$ für $t \in (0, T], y(0) = y_0$, mit $f(t, y) = (1 + y^2)^{1/2}$, $y(0) = 0$ und $T = 1$. Die exakte Lösung ist gegeben durch $y(t) = \sinh(t)$.

(i) Implementieren Sie das m-Adams-Bashforth-Verfahren für $m = 2, 3, 4$.

(ii) Implementieren Sie die folgenden Runge-Kutta-Verfahren:
- Euler-Verfahren,
- Euler–Collatz-Verfahren,
- klassisches Runge-Kutta-Verfahren,
- 3/8-Regel,
- Mittelpunkt-Verfahren,
- Radau-3-Verfahren.

Die expliziten Verfahren haben Sie bereits im vorhergehenden Praktikum implementiert, für die impliziten Verfahren verwenden Sie eine Fixpunktiteration mit einem geeigneten Abbruchkriterium.

(iii) Vergleichen Sie die Fehler $|y(T) - y_K|$ zum finalen Zeitpunkt $t_K = T$ der oben implementierten Verfahren (2, 3, 4-Adams-Bashforth, Runge-Kutta) für Schrittweiten $\tau = 2^{-l}, l = 2, 3, ...6$, in drei Tabellen. Als Startwerte können Sie die Funktionswerte der exakten Lösung verwenden. Vergleichen Sie auch die Genauigkeit im Vergleich mit der Anzahl der Funktionsauswertungen von f.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.** Die BDF-Verfahren *Backward Diferentiation Formulas* sind für $m \geq 1$ gegeben durch

$$\sum_{l=0}^{m} \hat{\alpha}_l y_{k+1} = \tau f(t_{k+m}, y_{k+m})$$

mit den Koeffizienten $\hat{\alpha}_m = \sum_{j=1}^{m} 1/j$ und

$$\hat{\alpha}_l = (-1)^{m-1} \sum_{j=m-l}^{m} \frac{1}{j} \binom{j}{m-1}, \tag{1}$$

$l = 0, 1, ..., m-1$. Verwenden Sie die BDF-Verfahren mit $m = 1, 2, ..., 7$ zur numerischen Approximation des Anfangswertproblems $y' = f(t, y)$ in $(0, T]$, $y(0) = y_0$, mit $f(t, y) = 2y + 5\cos(t)$, $y_0 = 1$ und $T = 1$, dessen exakte Lösung gegeben ist durch $y(t) = \sin(t) - 2\cos(t)$. Bestimmen Sie die experimentellen Konvergenzraten zum Zeitpunkt $T = 1$ mit geeigneten Folgen von Zeitschrittweiten und dem Ansatz $e_\tau \approx c\tau^\gamma$, sodass für zwei verschiedene Schrittweiten folgt

$$\gamma \approx \frac{log(e_\tau/e_{\tau'})}{log(\tau/\tau')}.$$