Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
M.Sc. Eng. Aristide C. Hounkpe

Sommersemester 2022

Numerik für Differentialgleichungen: Blatt 2

Abgabe: 18. Mai vor der Vorlesung im entsprechenden Kasten vor dem CIP-Pool, 2. OG, HH 10.

Existenz, Eindeutigkeit und Einschrittverfahren

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Konstruieren Sie unendlich viele Lösungen des Anfangswertproblems $y' = y^{1/3}, y(0) = 0$, skizzieren Sie einige und diskutieren Sie die Anwendbarkeit des Satzes von Picard-Lindelöf und des Satzes über die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Parametern.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $f \in C^k([0,T] \times \mathbb{R})$ und $y \in C^1([0,T])$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t,y)$. Zeigen Sie, dass $y \in C^{k+1}([0,T])$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Für eine stetige Abbildung $A : [0,T] \mapsto \mathbb{R}^{n\times n}$ betrachten wir das System von Differentialgleichungen $y' = A(t)y$.

(i) Überprüfen Sie, dass mit dem Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf die Existenz einer eindeutigen Lösung mit der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ für $y_0 \in \mathbb{R}^n$ gezeigt werden kann.

(ii) Zeigen Sie, dass die Menge L aller Lösungen des Systems $y' = A(t)y$ einen Vektorraum definiert.

(iii) Betrachten Sie die Abbildung $E_0 : L \to \mathbb{R}^n, y \mapsto y_0$ und folgern Sie, dass $\dim L = n$ gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Es seien $y \in C^2(\mathbb{R}_{\geq 0})$ und $\tau > 0$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ definiere $t_k = k\tau$ und setze $y^k = y(t_k)$. Zeigen Sie, dass für die Größen

$$d_t^- y^k = \frac{y^k - y^{k-1}}{\tau}, \; d_t^+ y^k = \frac{y^{k+1} - y^k}{\tau}$$

$k = 1, 2, ..., K-1$, die Abschätzungen

$$|d_t^\pm - y'(t_k)| \leq \frac{\tau}{2} \sup_{t \in t_k \pm [0,\tau]} |y''(t)|$$

gelten. Welche Abschätzung lässt sich für die Differenz $|\hat{d}_t y^k - y'(t_k)|$mit der Größe

$$\hat{d}_t y^k = \frac{y^{k+1} - y^{k-1}}{2\tau}$$

$k = 1, 2, ..., K-1,$, beweisen?