ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG SOMMERSEMESTER 2022
ABTEILUNG FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
PROF. DR. PATRICK DONDL
M.SC. ENG. ARISTIDE C. HOUNKPE

Numerik für Differentialgleichungen: Blatt 2

Abgabe: 01.Juni vor der Vorlesung im entsprechenden Kasten vor dem CIP-Pool, 2. OG, HH 10.

Einschrittverfahren

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Seien $(y_l)_{l=0,\ldots,K}$ eine nichtnegative Zahlenfolge und $\alpha, \beta \geq 0$, sodass für $l = 0, 1, \ldots.., K$ die Abschätzung

$$y_l \leq \alpha + \sum_{k=0}^{l-1} \beta y_k$$

gilt. Zeigen Sie, dass $y_l \leq \alpha(1+\beta)^l \leq \alpha \exp(K\beta y_k)$für $l = 0, 1, \ldots.., K$ gilt. Folgern Sie die diskrete Version des Lemmas von Gronwal

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Für eine Inkrementfunktion Φ und $z_k \in \mathbb{R}$ seien $z : [t_k, t_{k+1}] \mapsto \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems $z'(t) = f(t, z(t_k)), z(t_k) = z_k$, und $z_{k+1} = z_k + \tau\Phi(t_k, z_k, z_{k+1}, \tau)$. Damit seien die Konsistenzgrößen C und $\bar{C}$ definiert durch

$$C(t_k, z_k, \tau) = \frac{z(t_{k+1}) - z_k}{\tau} - \Phi(t_k, z_k, z_{k+1}, \tau)$$
$$\bar{C}(t_k, z_k, \tau) = \frac{z(t_{k+1}) - z_k}{\tau} - \Phi(t_k, z_k, z(t_{k+1}), \tau)$$

Die Inkrementfunktion Φ sei uniform Lipschitz-stetig im dritten Argument mit Lipschitz-Konstante L. Zeigen Sie, dass für $\tau \leq 1/(2L)$ die Äquivalenz

$$c^{-1}|\bar{C}(t_k, z_k, \tau)| \leq |C(t_k, z_k, \tau)| \leq c|\bar{C}(t_k, z_k, \tau)|$$

gilt. Geben Sie dabei die nur von L abhängige Konstante c explizit an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei f eine Lipschitz-stetige Funktion. Zeigen Sie, dass das implizite Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + \tau f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

konsistent von der Ordnung $p = 1$ ist, das heißt dass $|C(t_k, z_k, \tau)| \leq c\tau$ mit einer geeig- neten Konstanten $c \geq 0$ gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie Zahlen $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$ für die das durch die Inkrementfunktion

$$\Phi(t_k, y_k, \tau) = af(t_k, y_k) + bf(t_k + c\tau, y_k + \tau df(t_k, y_k))$$

definierte explizite Einschrittverfahren die Konsistenzordnung $p = 2$ besitzt.

Hinweis: Begründen und verwenden Sie die Approximation $f(t + c\tau, y + d\tau f(t, y)) = f(t, y) + \partial_t f(t, y)c\tau + \partial_y f(t, y)d\tau f(t, y) + \mathcal{O}(\tau^2)$ und differenzieren Sie die Differen- zialgleichung.