ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
ABTEILUNG FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
PROF. DR. PATRICK DONDL
M.SC. ENG. ARISTIDE C. HOUNKPE

Numerik für Differentialgleichungen: Blatt 5
Mehrschrittverfahren

Abgabe: 06.Juli vor der Vorlesung im entsprechenden Kasten vor dem CIP-Pool, 2. OG, HH 10.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie die maximale Zahl $p \in \mathbb{N}$ so dass

$$\sum_{l=0}^{m} \alpha_l = 0, \ \sum_{l=0}^{m} (\alpha_l l^q - \beta_l q l^{q-1}) = 0, \ q = 1, 2, ..., p,$$

für das Adams–Bashforth- und das Adams–Moulton-Verfahren mit $m = 3$ beziehungsweise $m = 2$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass das Adams–Moulton-Verfahren unter der Bedingung $\tau||\beta||_1 L < 1$ wohldefiniert ist, wobei L die uniforme Lipschitz-Konstante der zur Differenzialgleichung gehörenden Funktion f sei.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Untersuchen Sie, für welche Werte $z = \tau\lambda \in \mathbb{R}$ man mit dem durch

α_2	α_1	α_0	β_2	β_1	β_0
1	-1	0	0	3/2	-1/2
1	-1	0	5/12	8/12	-1/12
1	-4/3	1/3	2/3	0	0

definierten Zweischrittverfahren beschränkte Approximationen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= \lambda y \ \text{ in } (0, \infty) \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

erhält. Schreiben Sie dazu das Verfahren in der Form

$$Y_{k+1} = BY_k$$

und untersuchen Sie die Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, das es für jedes $m \geq 1$ genau ein lineares m-Mehrschrittverfahren der Konsistenzordnung $2m$ und keins der Konsistenzordnung $2m+1$ gibt. Verwenden Sie dazu, dass α_0 und β_0 eliminiert werden können, und formulieren Sie das allgemeine Konsistenzkriterium als lineares Gleichungssystem $A[\hat{\alpha}, \beta]^T = b$ mit $\hat{\alpha} = [\alpha_1, ..., \alpha_{m-1}]$. Verwenden Sie den Hauptsatz der Algebra zur Untersuchung der Matrix A^T.