Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
M.Sc. Eng. Aristide C. Hounkpe Sommersemester 2022

Numerik für Differentialgleichungen: Blatt 6

Konvergenz von Mehrschrittverfahren, Steife Differenzialgleichungen

Abgabe: 20.Juli vor der Vorlesung im entsprechenden Kasten vor dem CIP-Pool, 2. OG, HH 10.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $A \in R^{m\times m}$ die diagonalisierbare Begleitmatrix der durch $(\alpha)_{l=0,\dots,m}$ definierten Differenzengleichung. Zeigen Sie, dass die Folge $(y_k)_{k\geq 0}$ genau dann eine Lösung der homogenen ist, wenn für die Vektoren $Y_k = [y_k, y_{k+1}, ..., y_{k+m-1}]^T$ gilt $Y_k = \sum_{j=1}^m \lambda_j^k \gamma_j v_j, k \geq 0$ mit geeigneten Zahlen $\gamma_j \in \mathbb{R}$, Eigenvektoren v_j und den Nullstellen λ_j des Polynoms $q(\lambda) = \lambda^m + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} + ... + \lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_0$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Untersuchen Sie die Nullstabilität und Konsistenz des Mehrschrittverfahrens

$$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 3y_k = -2\tau f(t_k, y_k).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $A \in R^{2\times 2}$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Zeichnen Sie die Phasendiagramme der Differentialgleichung $z' = Az$ in einer Umgebung des Ursprungs für verschiedene typische Situationen mit

(i) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{>0}$
(ii) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{<0}$
(iii) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1\lambda_2 < 0$
(iv) $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch ist. Sie sollten Ihre Antwort begründen können.

Die Stabilitätsfunktion jedes expliziten Runge–Kutta-Verfahrens ist unbeschränkt.	
Die Rekursionsformel $y_{k+2} = y_{k+1} - (1/4)y_k$ ist nullstabil.	
Notwendig für die Konsistenz $p \geq 1$ eines Mehrschrittverfahrens ist die Bedingung $\sum_{l=0}^m \beta_l = 1$	
Die Bedingung $\sum_{l=1}^m \gamma_l = 1$ ist notwendig für die Konsistenz positiver Ordnung eines Runge–Kutta-Verfahrens.	
Der lokale Diskretisierungsfehler des expliziten Euler-Verfahrens für die Differentialgleichung $y' = \alpha y$ ist gegeben durch $(z(t_{k+1}) - z_k)/\tau - \alpha z_k$	
Gilt $f \in C^1(\mathbb{R})$ so besitzt das Anfangswertproblem $y' = f(y), y(0) = y_0$, für alle $y_0 \in \mathbb{R}$ und $T > 0$ eine Lösung $y \in C^1([0,T])$.	
Die Identität $y' = y(y(t))$definiert eine gewöhnliche Differentialgleichung.	