Abteilung für
Angewandte Mathematik

P. Dondl
P. Tscherner

15.04.2024

Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2024 — Blatt 1

Aufgabe 1 (Stammfunktionen) (4 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Stammfunktionen

(i) $\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$

(ii) $\int \frac{x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

(iii) $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$

(iv) $\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 2 (Binomial) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $s \in \mathbb{R}$ und alle $x \in (-1,1)$ gilt, dass

$$(1+x)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k,$$

wobei $\binom{s}{k} := \frac{s\cdot(s-1)\cdot(s-2)\cdot\ldots\cdot(s-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot 1}$ für $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\binom{s}{0} := 1$.

Hinweis: Berechnen Sie die Taylorreihe und zeigen Sie die Konvergenz zur entwickelten Funktion.

Aufgabe 3 (Eine Differentialgleichung) (4 Punkte)

Es seien $a, b, \omega \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei zweimal differenzierbar und es gelte

$$f(x) + \omega^2 f''(x) = 0, \quad f(0) = a, \quad f'(0) = \omega b. \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie, dass f unendlich oft differenzierbar ist.

(ii) Sei $a = b = 0$ und $T > 0$. Zeigen Sie, dass es ein $M > 0$ und ein $A > 0$ mit $|f(x)| \leq M$, $|f'(x)| \leq M$ und $|f^{(n)}(x)| \leq (2A)^n M$ für $n \geq 2$ und alle $x \in [-T,T]$ gibt. Folgern Sie daraus, dass f gleich seiner Taylorentwicklung um $x = 0$ ist und somit $f(x) = 0$ gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ genau ein f existiert, welches Voraussetzungen (1) erfüllt.

Hinweis: Benutzen Sie (ii) um die Eindeutigkeit zu zeigen. Um eine Lösung zu finden verwenden Sie den Ansatz $f(x) = c_1 \sin(c_2 x) + c_3 \cos(c_4 x)$.

Aufgabe 4 (Asymptotisches Verhalten von Potenzen) (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar mit $f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$.

(i) Zeigen Sie, dass
$$\ln f(x) = \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2) \quad \text{für } x \to 0.$$

(ii) Zeigen Sie, dass
$$\lim_{n\to\infty} \left(f\left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right)^n = e^{\frac{1}{2} f''(0) x^2}.$$

(iii) Folgern Sie, dass
$$\lim_{n\to\infty} \cos^n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) = e^{-\frac{1}{2} x^2}.$$

Abgabe: Montag, 22.04.2024, 10:30 Uhr.