

Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2024 — Blatt 10

Aufgabe 1 (Bewegung eines Teilchens)

(4 Punkte)

Betrachten Sie die Bewegung eines Teilchens der Masse $m > 0$ in einem Potential $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, beschrieben durch die Euler-Lagrange-Gleichung des Funktionals

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b \left(\frac{m}{2} |u'|^2 - V(u(t)) \right) dt, \quad \text{also} \quad f(t, x, v) = \frac{m}{2} |v|^2 - V(x).$$

Zeigen Sie, dass die Summe von kinetischer Energie $\frac{m}{2} |u'(t)|^2$ und potentieller Energie $V(u(t))$ zeitlich konstant ist.

Aufgabe 2 (Mikrostrukturen)

(4 Punkte)

Betrachten Sie auf $I = (0, 1)$ das Energiefunktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_I \left(1 - u'(t)^2 \right)^2 dt, \quad \text{also} \quad f(t, x, v) = (1 - v^2)^2.$$

Das Funktional ist für $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise C^1 definiert, also für Funktionen $u \in C^0([0, 1])$ für welche eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ existiert, sodass $u(t)$ auf jedem Teilintervall (t_j, t_{j+1}) eine C^1 -Funktion ist. Zeigen Sie:

- (i) Alle Funktionen $u(t) = at + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ sind Lösungen der Euler-Lagrange Gleichung. Geben Sie die zugehörige Energie an.
- (ii) Jede C^2 Lösung der Euler-Lagrange Gleichung hat die Form $u(t) = at + b$.
- (iii) Es gibt unendlich viele u stückweise C^1 mit $u(0) = u(1) = 0$ und $\mathcal{F}(u) = 0$.

Aufgabe 3 (Kein Minimierer)

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_I \left(1 - u'(t)^2 \right)^2 + u(t)^2 dt$$

keinen Minimierer in der Menge der stückweise C^1 -Funktionen besitzt.

Tipp: Zeigen Sie, dass das Infimum des Funktionals in den Stückweise- C^1 -Funktionen Null ist.

Aufgabe 4 (Beispiel Umkehrsatz)

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = (x + y + e^x, y^3)$$

bijektiv ist. Ist f ein Diffeomorphismus?

Aufgabe 5 (Anwesenheitsaufgabe)

Besprechen Sie den Satz über die inverse Funktion sowie den Satz über die implizite Funktion.

Abgabe: Montag, 01.07.2024, 10:30 Uhr.