Abteilung für
Angewandte Mathematik

P. Dondl
P. Tscherner

01.07.2024

Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2024 — Blatt 11

Aufgabe 1 (C^∞-Diffeomorphismen) (4 Punkte)
Sei $f : U := \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = (\cosh x \cos y, \sinh x \sin y)^\top,$$

wobei $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Zeigen Sie, dass $f|_{U_1} : U_1 \to f(U_1)$ mit $U_1 := \{(x,y)^\top : x > 0, 0 < y < 2\pi\}$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist und bestimmen Sie $f(U_1)$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass es für alle $p \in U$ eine offene Umgebung $\widehat{U}$ gibt, sodass $f : \widehat{U} \to f(\widehat{U})$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist. Allerdings kann $f : U \to f(U)$ selbst kein Diffeomorphismus sein (Warum nicht?). Um zu sehen, dass $f : U_1 \to f(U_1)$ ein Diffeomorphismus ist, überlegen Sie sich zunächst die Injektivität. Dazu hilft es die Bilder von $t \to f(x,t)$ und $t \to f(t,y)$ für verschiedene x, y Werte zu skizzieren (Diese Kurven sollten ineinandergeschachtelte Ellipsen und Hyperbeln sein).

Aufgabe 2 (Figure-Eight) (4 Punkte)
Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^4 - x^2 + y^2.$$

(i) Skizzieren Sie die Lösungsmenge von $f(x,y) = 0$, die eine Lemniskate/figure-eight Kurve definiert.

(ii) Bestimmen Sie alle $(x,y) \in f^{-1}(0)$, sodass Sie den Satz über implizite Funktionen anwenden können, um zu sehen, dass $f(x,y) = 0$ sowohl nach $y = y(x)$ als auch nach $x = x(y)$ auflösbar ist. Bestimmen Sie in diesen Punkten $y'(x)$ und $x'(y)$.

(iii) Argumentieren Sie mit Hilfe der Skizze, dass für alle verbleibenden Punkte mit $f(x,y) = 0$ wirklich nicht nach der betreffenden Variable aufgelöst werden kann.

Aufgabe 3 (Ein Gleichungssystem) (4 Punkte)
Wir betrachten das folgende Gleichungssystem im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} -e^x + y + x + z - 1 &= 0, \\ ye^{-z} - e^{-1} &= 0. \end{aligned}$$

(i) Sei $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ eine Lösung des Gleichungssystems. Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung U von x_0 in $\mathbb{R}$ und stetig differenzierbare Funktionen $g, h : U \to \mathbb{R}$ mit $g(x_0) = y_0$, $h(x_0) = z_0$ gibt sodass $(x, g(x), h(x))$ für alle $x \in U$ das Gleichungssystem löst.

(ii) Sei $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1)$ und g, h wie in (i). Berechnen Sie $g'(0)$ und $h'(0)$.

Aufgabe 4 (Zahl der Urbilder) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Es gelte

(1) f ist stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzbar

(2) $Df(x)$ ist invertierbar für alle $x \in \Omega$

(3) $y \notin f(\partial\Omega)$

Zeigen Sie, dass die Menge $f^{-1}\{y\}$ der Urbilder von y endlich ist. Illustrieren Sie, dass keine der Voraussetzungen (1), (2) oder (3) weggelassen werden kann.

Aufgabe 5 (Anwesenheitsaufgabe)
Veranschaulichen Sie die notwendige Bedingung für Minimierer mit Nebenbedingung. Diskutieren Sie Beispiele hierzu.

Abgabe: Montag, 08.07.2024, 10:30 Uhr.